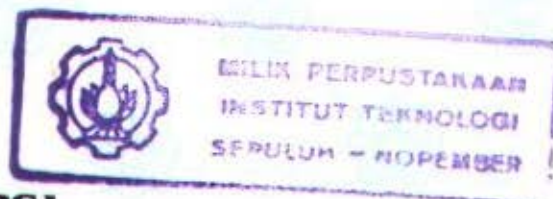


22931/H1'05



## SKRIPSI

### ANALISA GETARAN PADA LONCENG DENGAN TEKNIK SIMULASI

R S Ma

515.35

Dia

a - 1

2005

Oleh :

**TOMI DIARTO**  
NRP : 1299 109 002



PERPUSTAKAAN ITS	
Tgl. Terima	5-4-2005
Terima Dari	FI
No. Agenda Prp.	221658

**JURUSAN MATEMATIKA**  
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**  
**INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER**  
**SURABAYA**  
**2005**

# SKRIPSI

## ANALISA GETARAN PADA LONCENG DENGAN TEKNIK SIMULASI

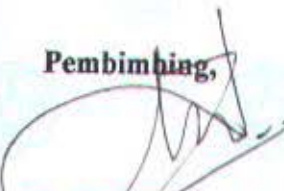
Dipersiapkan dan diusulkan oleh :

**TOMI DIARTO**  
NRP. 1299 109 002

Telah dipertahankan didepan tim Penguji  
pada tanggal : 13 Januari 2005

Susunan Tim Penguji :

Pembimbing,

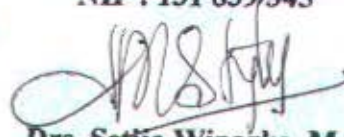
  
**Drs. Haryanto, M.Si**  
NIP : 131 124 884

Anggota Tim Penguji

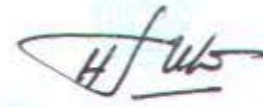
1.

  
**DR. Basuki Widodo, M.Sc**  
NIP : 131 839 345

2.

  
**Drs. Setijo Winarko, M.Si**  
NIP : 131 879 385

3.

  
**Drs. Lukman Hanafi, M.Sc**  
NIP : 131 782 039

Tugas Akhir ini telah diterima sebagai salah satu persyaratan  
untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika  
Surabaya, Januari 2005

Ketua Jurusan Matematika  
FMIPA ITS

  
**Drs. Lukman Hanafi, M.Sc**  
NIP : 131 782 039

## ABSTRAK

*Lonceng merupakan salah satu aplikasi pendulum ganda yang dapat menimbulkan getaran. Karena akibat dari getaran adalah timbulnya suatu bunyi, maka dipandang perlu untuk melakukan kajian dan penganalisaan mengapa dan pada waktu kapan lonceng dikatakan berbunyi dan tidak berbunyi. Proses modelling menggunakan metode Lagrange untuk mendapatkan penyelesaian persamaan differensialnya, yang nantinya akan disimulasikan dengan menggunakan program Microsoft Visual Basic. Dengan memberikan nilai  $\alpha = \beta$  maka lonceng **tidak** berbunyi sebaliknya jika  $\alpha \neq \beta$  maka akan terdapat dua kemungkinan yaitu lonceng berbunyi atau tidak, dengan mencari nilai interval untuk  $\alpha$  dan  $\beta$  sebarang yang memungkinkan lonceng berbunyi.*

**Kata Kunci :** *Lonceng, Lagrange, dan Simulasi*



## KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadiran Tuhan Yang Maha Esa atas segala anugerah, rahmat dan kasihNya yang begitu besar kepada penulis, sehingga dapat menyelesaikan Skripsi yang berjudul :

### **“ ANALISA GETARAN PADA LONCENG DENGAN TEKNIK SIMULASI “**

Atas selesainya Skripsi ini penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya pada semua pihak yang telah memberi bantuan dan dukungan sebagaimana berikut ini :

1. Drs. Lukman Hanafi, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA-ITS serta dosen penguji yang telah banyak memberikan masukan kepada penulis.
2. Drs. Haryanto, M.Si selaku dosen pembimbing yang telah banyak meluangkan waktu kepada penulis untuk membimbing penyelesaian skripsi ini.
3. DR. Basuki Widodo, M.Sc selaku dosen penguji yang telah banyak memberikan arahan, bimbingan serta masukan kepada penulis.
4. Drs. Setijo Winarko, M.Si selaku dosen penguji yang telah banyak memberikan masukan kepada penulis.
5. Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si selaku dosen wali yang telah banyak mengarahkan penulis selama kuliah.
6. Alm. Ayah, Ibu dan adikku yang sangat aku sayangi yang tak henti-hentinya mendoakan dan memberikan support selama ini kepada penulis.
7. Seluruh teman-teman MATH-EX 99 atas persahabatannya selama ini.
8. Seluruh arek-arek Gen-KRU, GR dan terlebih *Special thank's to.....*

9. Dan semua pihak yang tidak dapat kami sebutkan namanya satu-persatu yang telah banyak membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa laporan skripsi ini sangat jauh dari kesempurnaan, sehingga saran dan kritik yang membangun sangat diharapkan.

Akhirnya semoga laporan skripsi ini bermanfaat bagi pembaca.

Penulis

## DAFTAR ISI

LEMBAR JUDUL.....	i
LEMBAR PENGESAHAN.....	ii
ABSTRAK.....	iii
KATA PENGANTAR.....	iv
DAFTAR ISI.....	vi
DAFTAR GAMBAR.....	vii
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Permasalahan.....	2
1.3 Batasan Masalah dan Asumsi	
1.3.1 Batasan Masalah.....	2
1.3.2 Asumsi.....	3
1.4 Tujuan dan Manfaat.....	3
1.5 Metodologi.....	3
1.6 Sistematika Penulisan.....	4
BAB II DASAR TEORI	
2.1 Mekanika Getaran.....	5
2.1.1 Pengertian Derajat Kebebasan/DOF.....	6
2.1.2 Sistem Getaran dengan Dua Derajat Kebebasan.....	7
2.1.3 Hukum-Hukum Newton tentang Gerak.....	8
2.1.4 Energi Kinetik dan Energi Potensial.....	10
2.1.5 Persamaan Lagrange.....	13
2.1.6 Rotasi.....	25
2.1.7 Hukum Kekekalan Momentum.....	29
2.2 Pengertian Dasar Simulasi.....	30
BAB III PEMODELAN DAN PERANCANGAN SIMULASI	
3.1 Pemodelan Pada Lonceng.....	32
3.2 Perancangan Simulasi.....	43
BAB IV IMPLEMENTASI DAN ANALISIS.....	45
BAB V KESIMPULAN.....	50
DAFTAR PUSTAKA.....	51



## DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 Lonceng.....	1
Gambar 2.1 Sistem dengan dua derajat Kebebasan.....	7
Gambar 2.2 Energi Potensial gravitasi dari suatu benda.....	12
Gambar 2.3 $F_1$ dan $F_2$ masing-masing menimbulkan momen gaya .....	25
Gambar 2.4 Suatu titik P berputar terhadap sebuah sumbu.....	27
Gambar 3.1 Lonceng secara fisis.....	32
Gambar 3.2 Panjang/tinggi pendulum II yang sejajar sumbu x dan y .....	35
Gambar 3.3 Panjang/tinggi pendulum I dari titik O kepusat grafitasi B yang sejajar sumbu y.....	37
Gambar 3.4 Panjang/tinggi pendulum II yang sejajar sumbu y .....	37
Gambar 3.5 Diagram Flow Chart (Sistem masukan-keluaran) dari lonceng.....	43
Gambar 4.1 Tampilan muka simulasi lonceng.....	45
Gambar 4.2 Hasil output lonceng dengan nilai $\alpha = \beta$ dan $R = 12$ .....	46
Gambar 4.3 Hasil output lonceng dengan nilai $\alpha \neq \beta$ dan $R = 12$ .....	47
Gambar 4.4 Hasil output lonceng dengan nilai $\alpha \neq \beta$ dan $R = 12$ .....	48
Gambar 4.5 Hasil output lonceng dengan nilai $\alpha \neq \beta$ dan $R = 12$ .....	49

# **BAB I**

## **PENDAHULUAN**

Foto: *Rama*

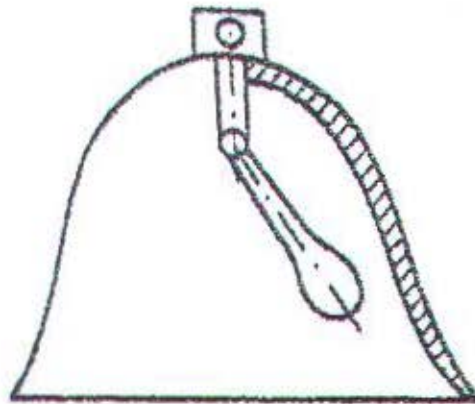


## BAB I

### PENDAHULUAN

#### I.1 Latar Belakang

Lonceng merupakan salah satu aplikasi dari pendulum ganda yang banyak dijumpai keberadaannya terutama pada gereja-gereja maupun kuil-kuil Budha yang secara fisis dapat digambarkan seperti dibawah ini.



Gambar 1.1. Lonceng

Dari gambar diatas didapati dua bandul matematis yang saling terkait satu dengan yang lainnya, dimana bandul pertama (atas) merupakan bandul yang mewakili gerak dari kulit atau tempurung lonceng, sedangkan bandul kedua (bawah) mewakili gerak dari pemukul lonceng.

Karena lonceng dapat menimbulkan getaran dan akibat dari getaran adalah timbulnya suatu bunyi, maka dipandang perlu untuk melakukan kajian dan analisa mengapa dan pada waktu kapan lonceng dikatakan berbunyi dan tidak berbunyi dengan metode simulasi.

## 1.2 Permasalahan

Dengan mempertimbangkan latar belakang diatas, pada tugas akhir ini, permasalahan yang akan dibahas adalah sebagai berikut :

1. Bagaimana perumusan model matematikanya.
2. Bagaimana perancangan simulasinya yang nantinya dapat memudahkan penganalisaan pada waktu kapan lonceng dikatakan berbunyi dan tidak berbunyi.

## 1.3 Batasan Masalah dan Asumsi

Untuk membahas kajian dalam tugas akhir ini akan diberi batasan masalah dan asumsi sebagai berikut :

### 1.3.1 Batasan Masalah

Permasalahan diatas perlu dibatasi sebagai berikut :

1. Perumusan model matematikanya terbatas sampai pada persamaan gerak lonceng yaitu  $\alpha$  dan  $\beta$ .
2. Perumusan model matematika pada loncengnya adalah menggunakan pengembangan hukum-hukum Newton seperti persamaan Lagrange.
3. Untuk simulasi modelnya menggunakan program Microsoft Visual Basic 6.0.
4. Pendeteksian bunyi dibatasi untuk lengan yang menyentuh hanya pada daun tempurung lonceng atau  $\frac{1}{2}$  kebawah tinggi lonceng.



### **1.3.2 Asumsi**

Dari batasan masalah yang ada maka model diasumsikan pada permukaan homogen sehingga dapat diformulasikan dengan menggunakan persamaan differensial.

### **1.4 Tujuan dan Manfaat**

Tujuan yang ingin dicapai dalam tugas akhir ini adalah merumuskan dan mensimulasikan model untuk menganalisa mengapa dan pada waktu kapan lonceng dikatakan berbunyi dan tidak berbunyi dengan metode simulasi.

Manfaat yang diperoleh dari penulisan tugas akhir ini adalah diharapkan dapat memberikan wawasan khusus mengenai penggunaan matematik untuk masalah-masalah mekanika getaran dalam hal ini khususnya mengenai penganalisaan getaran pada lonceng dengan teknik simulasi.

### **1.5 Metodologi**

Metodologi yang akan dilakukan dalam tugas akhir ini adalah :

1. Studi Literatur dari beberapa buku, paper dan makalah ilmiah yang ada hubungannya dengan analisa getaran pada lonceng.
2. Pemodelan dan perancangan simulasi.
3. Implementasi dan analisis.
4. Menyusun laporan.



## 1.6 Sistematika Penulisan

Tugas akhir ini disusun dengan menggunakan sistematika sebagai berikut :

### BAB I Pendahuluan

Disini akan diuraikan mengenai latar belakang, permasalahan, batasan masalah dan asumsi, tujuan dan manfaat, metodologi, dan sistematika penulisan.

### BAB II Dasar Teori

Disini akan diuraikan teori apa saja yang mendasari analisa getaran pada lonceng dengan teknik simulasi.

### BAB III Pemodelan dan Perancangan Simulasi.

Bab ini berisi tentang pemodelan matematika pada lonceng serta perancangan simulasinya.

### BAB IV Implementasi dan Analisis.

Pada bab ini berisi tentang implementasi dan analisa dari hasil simulasi yang telah dilakukan.

### BAB V Kesimpulan

Bab ini berisi kesimpulan dari implementasi dan analisis dari hasil simulasi yang telah dilakukan.

## **BAB II**

### **DASAR TEORI**

Foto: *Al Rama*

UIN Ar-Raniry, Jember  
Jember, 2023

## BAB II

### DASAR TEORI

#### 2.1 Mekanika Getaran

Mekanika getaran merupakan cabang ilmu fisika terapan yang banyak sekali mempelajari berbagai hal tentang getaran, dengan pengertian getaran itu sendiri ialah suatu gerakan yang bergerak secara berulang - ulang sendiri dalam interval waktu tertentu. Teori getaran berhubungan dengan studi tentang benda yang bergetar dan gaya yang bekerja pada benda tersebut.

Secara garis besar getaran dikelompokkan menjadi getaran bebas (*free vibration*) dan getaran paksa (*forced vibration*).

##### a. Getaran Bebas (*free vibration*)

Getaran bebas adalah gerakan periodik yang diamati sebagai sistem yang berpindah dari kedudukan setimbang statis. Gaya yang bekerja adalah gaya pegas, gesekan dan berat massa. Akibat adanya gesekan, getaran hilang sesuai dengan waktu, dan getaran seperti ini disebut getaran bebas (*free vibration*) atau kadangkala disebut transient (*transient*).

##### b. Getaran Paksa (*forced vibration*)

Getaran paksa ialah getaran yang terjadi apabila ada gaya luar yang bekerja pada sistem selama gerakan getarannya. Pada getaran paksa sistem cenderung bergetar pada frekuensi sendiri disamping mengikuti frekuensi gaya yang diinputkan.

Semua sistem getaran akan mengalami getaran sampai pada derajat tertentu, dengan pengertian sistem getaran itu sendiri ialah suatu gerakan yang bergerak secara



berulang-ulang sendiri dalam interval waktu tertentu dan merupakan bagian dari kehidupan nyata yang dipikirkan sebagai unit terpisah dalam kehidupan nyata tersebut. Pada pembahasan selanjutnya akan dijelaskan pengertian tentang Derajat Kebebasan/DOF (Degree Of Freedom).

### 2.1.1 Pengertian Derajat Kebebasan/DOF (Degree Of Freedom)

Derajat kebebasan/DOF dari sistem getaran adalah jumlah koordinat umum yang dibutuhkan untuk menggambarkan gerak sistem. Suatu benda tegar (rigid body) dalam ruang membutuhkan enam koordinat untuk mengidentifikasikan gerak benda yaitu tiga koordinat untuk posisi translasi dan tiga koordinat untuk posisi rotasi anguler. Tapi secara umum suatu sistem dibatasi agar hanya bergerak dalam arah tertentu.

Jika sistem partikel yang terdiri dari  $N$  partikel untuk menyatakan vektor posisi sistem, maka dibutuhkan  $N$  vektor, karena setiap vektor posisi dinyatakan dalam 3 koordinat maka diperlukan  $3N$  koordinat untuk menyatakan gerak sistem partikel. Jika terdapat batasan-batasan pada sistem biasanya dinyatakan dalam persamaan-persamaan, misal terdapat  $m$  persamaan batasan, maka jumlah minimum koordinat yang dibutuhkan untuk menyatakan gerak atau konfigurasi sistem adalah

$$n = 3N - m$$

dengan

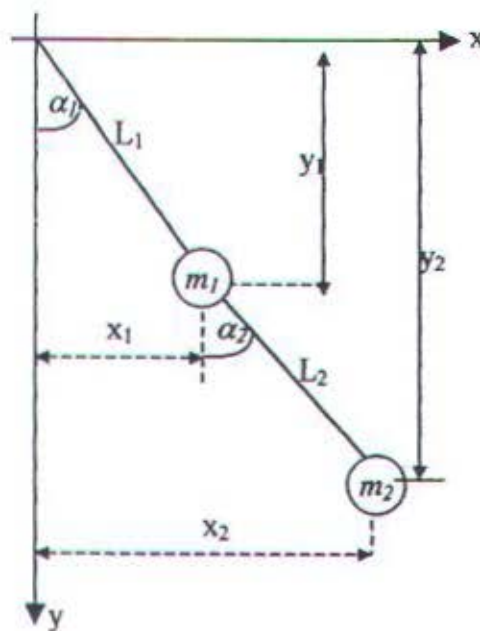
$n$  = jumlah derajat kebebasan sistem

Derajat kebebasan sistem dapat berupa parameter-parameter seperti panjang, sudut, energi, besaran tak berdimensi atau besaran-besaran lain sepanjang dapat dinyatakan gerak atau konfigurasi sistem. Jumlah  $n$  derajat kebebasan dapat dinyatakan dengan koordinat umum  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$  atau  $q_k$  dengan  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  dan tidak dapat

dibatasi oleh batasan-batasan. Dibawah ini akan dibahas pengertian khusus tentang sistem getaran dengan dua derajat kebebasan yang berhubungan dengan pendulum ganda.

### 2.1.2 Sistem Getaran dengan Dua Derajat Kebebasan

Apabila sistem dibatasi sehingga sistem dapat bergerak dalam dua modus atau kejadian, atau apabila dua koordinat bebas dibutuhkan untuk menunjukkan kedudukan massa sistem dalam ruang secara lengkap, maka sistem tersebut disebut sistem dengan dua derajat kebebasan. Dalam hal ini pendulum ganda merupakan salah satu sistem getaran dengan dua derajat kebebasan yang dapat terlihat dalam gambar 2.1 dibawah ini.



Gambar 2.1 Sistem dengan dua derajat kebebasan

Jelas bahwa untuk menentukan posisi massa  $m_1$  dan  $m_2$  pada berbagai waktu dibutuhkan dua buah koordinat sistem derajat kebebasan. Karena derajat kebebasan



menyatakan gerak sistem, maka persamaan gerak sistem dan bentuk perpindahan dapat diperoleh dengan menggunakan Hukum Newton kedua dengan kondisi awal perpindahan. Hukum Newton hanya dapat digunakan jika gaya yang bekerja pada sistem diketahui, dimana gaya gerak tersebut adalah dinamik. Berikut akan dibahas Hukum-hukum Newton tentang gerak.

### 2.1.3 Hukum-Hukum Newton tentang Gerak

Persamaan gerak dari suatu sistem dapat diperoleh dengan menggunakan Hukum Newton yang telah dirumuskan oleh Sir Isaac Newton pada abad 17 sebagai berikut :

#### a. Hukum I atau Hukum Kelembaman

Pada dasarnya setiap benda bersifat lembam. Ini berarti bahwa benda itu mempunyai sifat mempertahankan keadaannya. Bila benda itu sedang bergerak, maka benda itu bersifat “ingin” bergerak terus. Demikian pula, bila benda itu sedang tidak bergerak, maka benda itu bersifat “malas” untuk mulai bergerak. Jadi dapat disimpulkan bahwa setiap benda dalam keadaan berhenti mempunyai kecenderungan untuk tetap diam, sedangkan bila benda sedang bergerak, benda itu cenderung untuk bergerak terus.

Sifat cenderung yang demikian itulah yang diartikan sebagai *kelembaman* (inertia).

Dari gejala-gejala tersebut Sir Isaac Newton merumuskan hukum I tentang gerak sebagai berikut :

*“Setiap benda akan bergerak lurus beraturan atau tetap diam, jika tidak ada resultan gaya yang bekerja pada benda itu”.*

Hukum ini juga disebut *hukum kelembaman*.



b. Hukum II

Hukum II Newton tentang gerak dapat dinyatakan sebagai berikut :

*"Percepatan yang ditimbulkan oleh gaya yang bekerja pada sebuah benda berbanding lurus dengan besar gaya itu, searah dengan gaya itu, dan berbanding terbalik dengan massa kelembaman benda".*

Hukum ini dapat dinyatakan sebagai berikut :  $F = m.a$  (2.1)

dimana :  $F$  = resultan gaya yang bekerja pada benda

$m$  = massa benda

$a$  = percepatan

Hukum II Newton ini melukiskan hubungan antara percepatan dan gaya penyebabnya, dan ilmu yang mempelajari gerak suatu benda dengan memperhatikan penyebabnya disebut "*dinamika*".

c. Hukum III

*"Apabila suatu benda mengerjakan gaya pada benda lain, maka benda yang kedua ini mengerjakan pada benda pertama gaya yang sama besarnya tetapi arahnya berlawanan". (hukum III Newton tentang gerak).*

Jika suatu gaya bekerja pada benda sehingga benda terangkat vertikal keatas dengan kecepatan tetap, maka gaya tersebut melakukan usaha, dan usaha yang dilakukan dapat ditimbulkan kembali dan seharga dengan tambahan energi potensial gravitasi benda itu. Gaya-gaya yang semacam inilah yang disebut *gaya konservatif*, sedangkan gaya-gaya yang bekerja pada sebuah benda sehingga benda tersebut meluncur sepanjang permukaan mendatar yang kasar dengan kecepatan tetap, maka gaya-gaya tersebut akan melakukan usaha , dan

usaha yang dilakukan tidak dapat ditimbulkan kembali. Gaya seperti ini disebut *gaya non konservatif*.

Dalam melakukan gaya, pasti dibutuhkan suatu energi tertentu untuk melakukan gaya tersebut. Berikutnya akan dibahas pengertian tentang energi kinetik dan energi potensial.

#### 2.1.4 Energi Kinetik dan Energi Potensial

##### a. Energi Kinetik

Jika dalam waktu  $t$ , gaya konstan  $F$  dapat memindahkan benda sejauh  $s_t$  searah dengan  $F$ , maka usaha yang dilakukan oleh gaya tersebut ialah :

$$W = F s_t \quad (2.2)$$

Selanjutnya berlaku pula persamaan :  $F = m a$  (2.3)

Bila  $m$  massa benda dan  $a$  percepatannya, karena  $F$  pada persamaan (2.3) konstan, maka  $a$  juga konstan, hingga berlakulah persamaan :

$$v_t = v_o + a t, \text{ hingga } a = \frac{v_t - v_o}{t} \quad (2.4)$$

dengan  $v_t$  kecepatan benda pada keadaan akhir dan  $v_o$  kecepatan benda pada keadaan awal. Di sini berlaku pula :  $s_t = v_o t + \frac{1}{2} a t^2$  (2.5)

Dari persamaan (2.4) dan (2.5) diperoleh persamaan :

$$s_t = \left( \frac{1}{2} v_t + \frac{1}{2} v_o \right) t \quad (2.6)$$

Jadi usaha yang dilakukan oleh  $F$  menurut persamaan (2.2) ialah

$$W = \frac{1}{2} m v_t^2 + \frac{1}{2} m v_o^2 \quad (2.7)$$

Besaran  $\frac{1}{2}mv^2$  dinamakan *energi kinetik* ( $T$ ), atau energi gerak hingga

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (2.8)$$

Dari persamaan (2.8) mudah diketahui bahwa apabila kecepatan suatu benda makin besar, maka energi kinetiknya makin besar pula. Besaran  $\frac{1}{2}mv_i^2$  menunjukkan energi kinetik pada keadaan akhir, dan  $\frac{1}{2}mv_o^2$  menunjukkan energi kinetik pada keadaan awal, hingga persamaan (2.7) menjadi

$$W = T_i - T_o = \Delta T \quad (2.9)$$

Jadi, *usaha yang dilakukan oleh suatu gaya terhadap sebuah benda sama dengan penambahan energi kinetik dari benda tersebut.*

Apabila energi kinetik sistem dinyatakan dalam koordinat umum maka untuk menggambarkan sistem  $N$  partikel, kedudukan sesaat tiap partikel dapat dinyatakan dalam  $N$  koordinat umum.  $r_j = r_j(q_{11}, q_{12}, \dots, q_{1N})$  (2.10)

Turunan  $r_j$  terhadap waktu menghasilkan hubungan

$$\begin{aligned} \frac{dr_j}{dt} = \dot{r}_j &= \frac{\partial r_j}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial r_j}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \dots + \frac{\partial r_j}{\partial q_n} \frac{dq_n}{dt} \\ \frac{dr_j}{dt} = \dot{r}_j &= \frac{\partial r_j}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial r_j}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial r_j}{\partial q_n} \dot{q}_n \\ \dot{r}_j &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial r_j}{\partial q_i} \dot{q}_i \end{aligned} \quad (2.11)$$

Kecepatan partikel ke-  $j$  didefinisikan sebagai berikut :

$$v_j = \sum_{i=1}^N \frac{\partial r_j}{\partial q_i} \dot{q}_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.12)$$



dan energi kinetik sistem menjadi

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j v_j \cdot v_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left( \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (2.13)$$

Dengan mendefinisikan *massa umum* sebagai

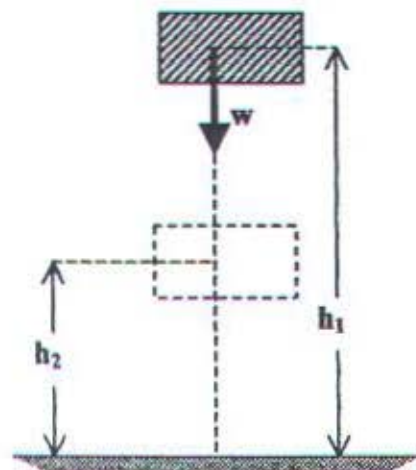
$$m_{ij} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \quad (2.14)$$

maka energi kinetik dapat ditulis sebagai

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (2.15)$$

## b. Energi potensial

Sebuah busur yang direntangkan, apabila dilepas dapat meluncurkan anak panah. Busur tersebut mempunyai kemampuan atau potensi untuk meluncurkan anak panah. Dengan demikian busur yang direntangkan mempunyai energi potensial. Sebuah benda yang diletakkan di suatu ketinggian, apabila dilepaskan, mampu untuk bergerak, sebab benda tersebut mempunyai energi potensial. Perhatikan pada gambar 2.2 dibawah ini,



Gambar 2.2 Energi Potensial gravitasi dari suatu benda

Dilukiskan sebuah benda yang diletakkan di tempat setinggi  $h_1$  dari tanah. Setelah dilepaskan, benda lalu bergerak kebawah.

Untuk mencapai tempat setinggi  $h_2$  dari tanah, gaya berat melakukan usaha sebesar :

$$\begin{aligned} W_w &= mg ( h_1 - h_2 ) \\ W_w &= - ( mgh_2 - mgh_1 ) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Besaran  $mgh$  dinamakan *energi potensial gravitasi* ( $V$ ) atau *energi tempat*, yaitu:

$$(V)_{\text{gravitasi}} = mgh \quad (2.17)$$

Makin tinggi letak benda makin besar energi potensialnya. Pada persamaan (2.16),  $mgh_2$  adalah energi potensial pada keadaan akhir dan  $mgh_1$  adalah energi potensial pada keadaan awal, hingga

$$W_w = - ( V_2 - V_1 ) = V \quad (2.18)$$

Jadi, *Usaha yang dilakukan oleh gaya berat sebuah benda sama dengan pengurangan energi potensial dari benda tersebut.*

Pada pembahasan dibawah ini akan dibahas perumusan persamaan Lagrange yang dinyatakan dalam energi kinetik dan energi potensial.

### 2.1.5 Persamaan Lagrange

Persamaan Lagrange adalah persamaan differensial yang dinyatakan dalam koordinat umum. Sedangkan koordinat umum sendiri adalah koordinat bebas yang menyatakan gerak sistem dengan  $n$  derajat kebebasan, yang biasanya dinotasikan dengan  $q_i$ , yang dapat dinyatakan sebagai kecepatan ( $v$ ), posisi ( $x$ ), dan sudut ( $\alpha$ ). Berikut ini akan dibahas persamaan Lagrange untuk partikel tunggal, sistem partikel dan mendapatkan persamaan gerak dengan pendekatan lagrange.

a. Persamaan Lagrange untuk Partikel Tunggal

Jika suatu partikel dengan massa  $m$  yang bergerak pada koordinat Kartesian  $x, y$  di bawah pengaruh gaya  $F$  dengan persamaan :

$$F = F_x i + F_y j \quad (2.19)$$

Posisi partikel pada koordinat Kartesian  $x, y$  dapat dinyatakan dengan koordinat umum  $q_1, q_2, \dots, q_k$ . Agar lebih sederhana untuk selanjutnya koordinat umum  $q_k$  dibatasi untuk  $k=1, 2$  sehingga

$$x = x(q_1, q_2) \quad (2.20)$$

$$y = y(q_1, q_2) \quad (2.21)$$

Turunan terhadap waktu dari persamaan (2.20) dan (2.21) adalah

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \dot{q}_2 \quad (2.22)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \dot{q}_2 \quad (2.23)$$

Pada persamaan (2.22) dan (2.23) terlihat bahwa  $\dot{x}$  dan  $\dot{y}$  merupakan fungsi dari  $q_1, q_2$  dan  $\dot{q}_1, \dot{q}_2$ . Bila persamaan (2.22) dan (2.23) diturunkan parsial terhadap  $\dot{q}_1$  dan  $\dot{q}_2$  diperoleh :

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial x}{\partial q_2} \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial y}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial y}{\partial q_2} \quad (2.25)$$

Turunan parsial dari persamaan (2.22) dan (2.23) terhadap  $q_1$  atau  $q_2$  menghasilkan hubungan

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2} \dot{q}_2$$



$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_2} &= \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_2^2} \dot{q}_2 \\
\frac{\partial \dot{y}}{\partial q_1} &= \frac{\partial^2 y}{\partial q_1^2} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 y}{\partial q_1 \partial q_2} \dot{q}_2 \\
\frac{\partial \dot{y}}{\partial q_2} &= \frac{\partial^2 y}{\partial q_1 \partial q_2} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 y}{\partial q_2^2} \dot{q}_2
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Persamaan (2.24) dan (2.25) dapat ditulis juga sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial q_1} &= \frac{\partial}{\partial q_1} [x(q_1, q_2)] & \frac{\partial y}{\partial q_1} &= \frac{\partial}{\partial q_1} [y(q_1, q_2)] \\
\frac{\partial x}{\partial q_2} &= \frac{\partial}{\partial q_2} [x(q_1, q_2)] & \frac{\partial y}{\partial q_2} &= \frac{\partial}{\partial q_2} [y(q_1, q_2)]
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Turunan persamaan (2.27) terhadap waktu menghasilkan hubungan

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} \right) &= \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} \right) \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{\partial x}{\partial q_2} \right) \frac{dq_2}{dt} \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} \right) &= \frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2} \dot{q}_2 \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial q_2} \right) &= \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} \right) \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{\partial x}{\partial q_2} \right) \frac{dq_2}{dt} \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial q_2} \right) &= \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_2^2} \dot{q}_2 \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y}{\partial q_1} \right) &= \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{\partial y}{\partial q_1} \right) \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{\partial y}{\partial q_2} \right) \frac{dq_2}{dt} \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y}{\partial q_1} \right) &= \frac{\partial^2 y}{\partial q_1^2} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 y}{\partial q_1 \partial q_2} \dot{q}_2 \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y}{\partial q_2} \right) &= \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{\partial y}{\partial q_1} \right) \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{\partial y}{\partial q_2} \right) \frac{dq_2}{dt} \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y}{\partial q_2} \right) &= \frac{\partial^2 y}{\partial q_1 \partial q_2} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 y}{\partial q_2^2} \dot{q}_2
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Dari persamaan (2.26) dan (2.28) diperoleh hubungan

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right) &= \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_2} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right) &= \frac{\partial \dot{y}}{\partial q_1}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right) = \frac{\partial \dot{y}}{\partial q_2}\end{aligned}\tag{2.29}$$

Energi Kinetik Partikel dapat dinyatakan  $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ , juga merupakan fungsi  $q_1$ ,

$q_2$ , sehingga turunan parsial energi kinetik terhadap  $q_1$  atau  $q_2$  menghasilkan hubungan :

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial q_1} &= \frac{1}{2}m\left[\frac{\partial \dot{x}^2}{\partial q_1} + \frac{\partial \dot{y}^2}{\partial q_1}\right] \\ \frac{\partial T}{\partial q_1} &= \frac{1}{2}m\left[\frac{\partial \dot{x}^2}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} + \frac{\partial \dot{y}^2}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial q_1}\right] \\ \frac{\partial T}{\partial q_1} &= \frac{1}{2}m\left[2\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} + 2\dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial q_1}\right] \\ \frac{\partial T}{\partial q_1} &= m\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} + m\dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial q_1}\end{aligned}\tag{2.30}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial q_2} &= \frac{1}{2}m\left[\frac{\partial \dot{x}^2}{\partial q_2} + \frac{\partial \dot{y}^2}{\partial q_2}\right] \\ \frac{\partial T}{\partial q_2} &= \frac{1}{2}m\left[\frac{\partial \dot{x}^2}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_2} + \frac{\partial \dot{y}^2}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial q_2}\right] \\ \frac{\partial T}{\partial q_2} &= \frac{1}{2}m\left[2\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_2} + 2\dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial q_2}\right] \\ \frac{\partial T}{\partial q_2} &= m\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_2} + m\dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial q_2}\end{aligned}\tag{2.31}$$

Sedangkan turunan parsial terhadap  $\dot{q}_1$  atau  $\dot{q}_2$  menghasilkan hubungan

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= \frac{1}{2} m \left[ \frac{\partial \dot{x}^2}{\partial \dot{q}_1} + \frac{\partial \dot{y}^2}{\partial \dot{q}_1} \right] \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= \frac{1}{2} m \left[ \frac{\partial \dot{x}^2}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} + \frac{\partial \dot{y}^2}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_1} \right] \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= \frac{1}{2} m \left[ 2\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} + 2\dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_1} \right] \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= m\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} + m\dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_1}\end{aligned}\tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{1}{2} m \left[ \frac{\partial \dot{x}^2}{\partial \dot{q}_2} + \frac{\partial \dot{y}^2}{\partial \dot{q}_2} \right] \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{1}{2} m \left[ \frac{\partial \dot{x}^2}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_2} + \frac{\partial \dot{y}^2}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_2} \right] \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{1}{2} m \left[ 2\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_2} + 2\dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_2} \right] \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} &= m\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_2} + m\dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_2}\end{aligned}\tag{2.33}$$

Kombinasi dari persamaan (2.24), (2.25), (2.32) dan (2.33) diperoleh hubungan

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= m\dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} + m\dot{y} \frac{\partial y}{\partial q_1} \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} &= m\dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_2} + m\dot{y} \frac{\partial y}{\partial q_2}\end{aligned}\tag{2.34}$$

Jika persamaan (2.34) diturunkan terhadap waktu, diperoleh hubungan

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) &= m\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} + m\ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_1} + m\dot{x} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} \right) + m\dot{y} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y}{\partial q_1} \right) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) &= m\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_2} + m\ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_2} + m\dot{x} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial q_2} \right) + m\dot{y} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y}{\partial q_2} \right)\end{aligned}\tag{2.35}$$



Kombinasi dari persamaan (2.29) dan (2.35) diperoleh hubungan

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) &= m\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_1} + m\ddot{y}\frac{\partial y}{\partial q_1} + m\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} + m\dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial q_1} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) &= m\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_2} + m\ddot{y}\frac{\partial y}{\partial q_2} + m\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_2} + m\dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial q_2}\end{aligned}\quad (2.36)$$

Suku ketiga dan keempat dari ruas kanan pada persamaan (2.36) merupakan suku-suku ruas kanan persamaan (2.30) dan (2.31), sehingga diperoleh hubungan

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= m\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_1} + m\ddot{y}\frac{\partial y}{\partial q_1} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= m\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_2} + m\ddot{y}\frac{\partial y}{\partial q_2}\end{aligned}\quad (2.37)$$

Karena  $m\ddot{x} = F_x$  dan  $m\ddot{y} = F_y$ , maka persamaan (2.37) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= Q_1 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= Q_2\end{aligned}\quad (2.38)$$

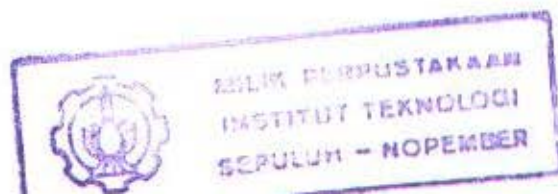
Dengan  $Q_1$  dan  $Q_2$  masing-masing menyatakan gaya pada koordinat umum  $q_1$  dan  $q_2$

$$\begin{aligned}Q_1 &= F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} \\ Q_2 &= F_x \frac{\partial x}{\partial q_2} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_2}\end{aligned}\quad (2.39)$$

Persamaan (2.38) disebut persamaan Lagrange. Bila gaya yang bekerja pada partikel merupakan gaya konservatif, maka akan diperoleh hubungan

$$\begin{aligned}Q_1 &= -\frac{\partial V}{\partial q_1} \\ Q_2 &= -\frac{\partial V}{\partial q_2}\end{aligned}\quad (2.40)$$

Dengan  $V$  = energi potensial sebagai fungsi  $q_1, q_2$



Didefinisikan fungsi Lagrange ( $L$ ) sebagai selisih antara energi kinetik dengan energi potensial.

$$L = T - V \quad (2.41)$$

Dari persamaan (2.41) terlihat bahwa fungsi Lagrange  $L$  merupakan fungsi  $q_1, q_2, \dot{q}_1$  dan  $\dot{q}_2$ . Turunan parsial fungsi Lagrange terhadap  $q_1, q_2, \dot{q}_1$  atau  $\dot{q}_2$  menghasilkan hubungan

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_1} &= \frac{\partial T}{\partial q_1} - \frac{\partial V}{\partial q_1} \\ \frac{\partial L}{\partial q_2} &= \frac{\partial T}{\partial q_2} - \frac{\partial V}{\partial q_2} \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \quad (2.43)$$

Kombinasi dari persamaan (2.40), (2.42) dan (2.43) diperoleh hubungan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} - \frac{\partial V}{\partial q_1} &= - \frac{\partial V}{\partial q_1} & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} - \frac{\partial V}{\partial q_2} &= - \frac{\partial V}{\partial q_2} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} &= 0 & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Persamaan (2.44) merupakan persamaan Lagrange untuk sistem konservatif karena adanya pengaruh energi potensial, sedangkan persamaan (2.38) berlaku untuk sistem non konservatif karena tidak adanya pengaruh energi potensial.

#### b. Persamaan Lagrange untuk Sistem Partikel

Jika gerak suatu sistem partikel terdiri dari  $N$  partikel, maka energi kinetik sistem bila dinyatakan dalam koordinat kartesian  $x, y$  dan  $z$  adalah

$$T = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \right] \quad (2.45)$$

Untuk menyederhanakan pembahasan koordinat  $y_i$  dan  $z_i$  dinyatakan dalam koordinat  $x_i$ . Karena setiap partikel mempunyai 3 derajat kebebasan, maka jumlah koordinat  $x_i$  yang diperlukan untuk menyatakan  $N$  partikel adalah  $3N$  koordinat.

Dengan demikian energi kinetik sistem dapat ditulis menjadi

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \quad (2.46)$$

Koordinat  $x_i$  dapat dinyatakan fungsi dari koordinat umum  $q_1, q_2, \dots, q_n$

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n) = x_i(q) \quad (2.47)$$

Turunan  $x_i$  terhadap waktu menghasilkan hubungan

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i &= \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_n} \dot{q}_n \\ \dot{x}_i &= \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \end{aligned} \quad (2.48)$$

dengan

$i = 1, 2, \dots, 3N$  menyatakan jumlah partikel

$k = 1, 2, \dots, n$  menyatakan derajat kebebasan

Energi kinetik sistem partikel merupakan fungsi dari  $q$  dan  $\dot{q}$ ,  $T = T(q, \dot{q})$ . Turunan parsial energi kinetik terhadap  $\dot{q}_k$  adalah



$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left[ \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right] = \sum_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left[ \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right] \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} &= \sum_i \left[ m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} \right]\end{aligned}\tag{2.49}$$

Dari persamaan (2.24) dan (2.25) diperoleh hubungan

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x}{\partial q_k}$$

Dengan demikian persamaan (2.49) berubah menjadi

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_i \left[ m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right]\tag{2.50}$$

Turunan persamaan (2.50) terhadap waktu menghasilkan hubungan

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right] = \sum_i m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \sum_i m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right]\tag{2.51}$$

Dari persamaan (2.39) diperoleh persamaan gaya umum  $Q_k$

$$Q_k = F_x \frac{\partial x}{\partial q_k} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_k} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_k}$$

Untuk sistem partikel berlaku hubungan

$$Q_k = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \sum_i m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\tag{2.52}$$

Suku kedua ruas kanan pada persamaan (2.51) dapat ditulis dalam bentuk lain

$$\begin{aligned}\sum_i m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) &= \sum_i m_i \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{dx_i}{dt} \right) = \sum_i m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} = \\ \sum_i \frac{1}{2} m_i 2 \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \dot{x}_i^2}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} = \sum_i \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right) = \frac{\partial T}{\partial q_k}\end{aligned}\tag{2.53}$$

Kombinasi persamaan (2.51), (2.52) dan (2.53) diperoleh hubungan

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad , k = 1, 2, \dots, n \quad (2.54)$$

Untuk sistem yang konservatif, persamaan (2.54) berubah menjadi

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (2.55)$$

### c. Mendapatkan Persaman Gerak dengan Pendekatan Lagrange.

Persamaan gerak pada sistem dinamika dapat diperoleh dengan menggunakan metode Lagrange yang dapat dinyatakan dalam energi kinetik dan energi potensial. Pertama-tama diperhatikan suatu sistem konservatif dengan jumlah energi kinetik dan energi potensial adalah konstan. Diferensial total energi adalah nol.

$$d(T + V) = 0 \quad (2.56)$$

Energi kinetik  $T$  adalah fungsi koordinat umum  $q_i$  dan kecepatan umum  $\dot{q}_i$ , sedangkan energi potensial  $v$  adalah fungsi  $q_i$  saja.

$$\begin{aligned} T &= T(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N) \\ V &= V(q_1, q_2, \dots, q_N) \end{aligned} \quad (2.57)$$

Diferensial total  $T$  adalah

$$dT = \sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \quad (2.58)$$

Untuk mengeliminasi suku kedua dengan  $d\dot{q}_i$ , maka dimulai dari persamaan (2.15) mengenai energi kinetik

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (2.59)$$

Diferensiasi persamaan ini terhadap  $\dot{q}_i$ , mengalikannya dengan  $\dot{q}_i$ , dan menjumlahkan  $i$  dari 1 hingga  $N$ , akan memberikan hasil yang sama dengan

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij} \dot{q}_j \dot{q}_i = 2T$$

atau

$$2T = \sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \quad (2.60)$$

Sekarang dibentuk diferensial  $2T$  dari persamaan diatas dengan menggunakan aturan perkalian kalkulus

$$2dT = \sum_{i=1}^N d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) \dot{q}_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \quad (2.61)$$

Dengan mengurangi persamaan ini dengan persamaan (2.58), maka suku kedua dengan  $d\dot{q}_i$  dapat dieliminir. Dengan menukar besaran skalar  $dt$ , suku  $d(\partial T / \partial \dot{q}_i) \dot{q}_i$  menjadi  $d/dt(\partial T / \partial \dot{q}_i) dq_i$  dan hasilnya adalah

$$dT = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] dq_i \quad (2.62)$$

Dari persamaan (2.57) diferensial total dari  $V$  adalah

$$dV = \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial q_i} dq_i \quad (2.63)$$

Jadi persamaan (2.56) untuk invarian energi total menjadi

$$d(T + V) = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} \right] dq_i = 0 \quad (2.64)$$

Karena  $N$  koordinat umum, maka untuk  $dq_i$  boleh diambil nilai sembarang. Jadi persamaan diatas hanya dipenuhi jika



$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.65)$$

Ini adalah persamaan Lagrange untuk kasus dimana semua gaya mempunyai potensial  $V$ . Ini dapat diubah dengan memperkenalkan Lagrange  $L = T - V$ . Karena  $\partial V / \partial q_i = 0$ , maka persamaan (2.65) dapat dinyatakan dalam  $L$  sebagai

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.66)$$

Jika sistem juga dipengaruhi gaya-gaya yang tidak mempunyai potensial, maka sebagai ganti persamaan (2.56) dipakai

$$d(T + V) = dW \quad (2.67)$$

dengan  $dW$  adalah kerja dari gaya tak berpotensial jika sistem mengalami perpindahan sembarang yang sangat kecil, maka  $dW$  dinyatakan dalam koordinat umum  $q_i$ ,

$$dW = \sum_{i=1}^N Q_i dq_i \quad (2.68)$$

dengan besaran  $Q_i$  adalah gaya umum yang berhubungan dengan koordinat umum  $q_i$ .

Sehingga persamaan gerak dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.69)$$

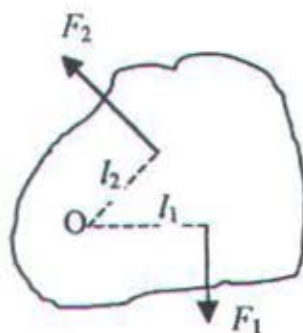
Pada umumnya gerak suatu benda pasti mengalami yang namanya gerak rotasi, baik itu terhadap pusat bumi maupun terhadap sumbu sendiri. Dibawah ini akan dijelaskan tentang gerak rotasi.

### 2.1.6 Rotasi

Pada waktu suatu benda bergerak, umumnya benda tersebut sekaligus menjalani dua macam gerak, ialah gerak translasi dan gerak rotasi. Contohnya, sebuah piring digeser dimeja, nampaknya hanya menjalani gerak translasi, tetapi sebetulnya mengadakan gerak rotasi terhadap pusat bumi. Sebuah bola bilyart yang sedang menggelinding, disamping mengadakan gerak translasi yang sebetulnya adalah gerak rotasi terhadap pusat bumi, juga mengadakan gerak rotasi terhadap sumbu sendiri. Pada pembahasan dibawah ini akan dijelaskan tentang momen gaya (putar), persamaan-persamaan gerak untuk gerak rotasi dan momen kelembaman (inersia) yang berhubungan dengan gerak rotasi.

#### a. Momen Gaya (Putar)

Pada gambar 2.3 dibawah ini menunjukkan suatu benda yang diam dan yang dapat berputar sekeliling suatu sumbu melalui titik O yang tegak lurus bidang gambar.



Gambar 2.3  $F_1$  dan  $F_2$  masing-masing menimbulkan momen gaya

Pada benda tersebut bekerja gaya  $F_1$  dan  $F_2$  yang terletak pada bidang gambar. Baik gaya  $F_1$  maupun  $F_2$  masing-masing akan menyebabkan benda berputar atau berotasi. Gaya  $F_1$  dan  $F_2$  masing-masing menimbulkan momen pada benda terhadap sumbu

putarnya. Karena gaya  $F_1$  benda berputar searah dengan putaran jarum jam dan karena gaya  $F_2$  berlawanan dengan putaran jarum jam. Jika momen yang disebabkan oleh  $F_1$  dinamakan positif, maka yang disebabkan oleh  $F_2$  negatif. Namakan jarak dari titik O ke gaya  $F_1$  dengan  $l_1$  dan jarak dari titik O ke gaya  $F_2$  dengan  $l_2$  maka momen dari  $F_1$  terhadap O adalah  $T_1 = l_1 F_1$  dan momen dari  $F_2$  terhadap O adalah  $T_2 = l_2 F_2$ .

Sedangkan momen dari  $F_1$  dan  $F_2$  bersama-sama terhadap O adalah  $T = T_1 + T_2$ , sehingga apabila pada benda tersebut bekerja  $n$  buah momen yaitu  $T_1, T_2, T_3, \dots$  dan  $T_n$ , maka momen resultannya ialah  $T = T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n$  (2.70)

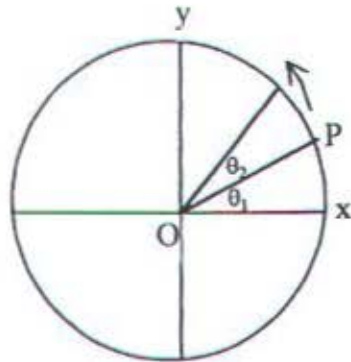
Jadi pada umumnya, jika pada suatu benda bekerja suatu gaya  $F$  yang arahnya tegak lurus sumbu putaran benda dan jarak garis kerjanya ke sumbu itu adalah  $l$  maka momen gaya tersebut terhadap sumbu ialah

$$T = l F \quad (2.71)$$

## b. Persamaan-persamaan Gerak

Berikut ini akan dibicarakan tentang benda yang hanya mengadakan gerak rotasi terhadap suatu sumbu yang tetap. Akan diperoleh bahwa banyak persamaan-persamaan untuk gerak rotasi yang mirip dengan persamaan-persamaan untuk gerak translasi. Hanya saja, jika pada gerak translasi dijumpai besaran linier, maka pada gerak rotasi ini akan dijumpai besaran sudut. Pada gambar 2.4 dibawah ini dilukiskan suatu titik P yang berputar terhadap sumbu yang tegak lurus bidang gambar dan melalui titik O.





Gambar 2.4 Suatu titik P berputar terhadap sebuah sumbu

Perhatikan garis OP yang menghubungkan titik O dan titik P. Posisi titik P dapat di lihat dari besarnya sudut  $\theta$  yang dibentuk oleh garis OP terhadap sumbu x yang melalui titik O. Apabila waktu keliling atau periode dinyatakan dengan  $T$  ( yang dimaksudkan dengan waktu  $T$  ialah lamanya waktu titik P mengelilingi lingkaran satu kali), maka laju titik P

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad (2.72)$$

Karena selama selang waktu  $T$  besar sudut yang ditempuh oleh r adalah  $2\pi$  rad., maka

$\frac{2\pi}{T}$  (rad) disebut *kecepatan angular* ( $\omega$ ). *Kecepatan angular rata-rata* dari titik itu ialah

$$\omega = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (2.73)$$

Kecepatan angular sesaat diperoleh dengan mengambil waktu  $\Delta t$  mendekati nol, maka persamaan (2.73) menjadi :

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (2.74)$$

Bentuk diatas, secara matematik hasilnya dapat dituliskan :  $\frac{d\theta}{dt}$  dan disebut sebagai

turunan  $\theta$  terhadap waktu.

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad (2.75)$$

Apabila kecepatan anguler  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , maka persamaan (2.72) menjadi

$$v = \omega r \quad (2.76)$$

$v$  disebut kecepatan linier untuk membedakannya dengan kecepatan anguler. Meskipun laju di titik P konstan, namun kecepatan liniernya tidaklah konstan (kecepatan disini merupakan sebuah vektor).

### c. Momen Kelembaman (inersia)

Dalam persamaan (2.76) telah dibicarakan bahwa kecepatan linier di titik P adalah  $v = \omega r$ , dimana  $r$  adalah jarak dari titik P ke sumbu putaran dan  $\omega$  adalah kecepatan anguler di titik P.

Jika massa di titik P adalah  $m$ , maka energi kinetik di titik tersebut ialah

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m v^2 \\ &= \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 \end{aligned} \quad (2.77)$$

Faktor  $m r^2$  dinamakan *momen kelembaman* dari titik tersebut terhadap sumbu putarnya dengan notasi  $I$ , yaitu

$$I = m r^2 \quad (2.78)$$

sehingga :

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (2.79)$$

Persamaan (2.78) hanya berlaku untuk satu titik materi. Sedangkan untuk benda yang tidak kecil yang terdiri dari sejumlah titik-titik materi, maka momen kelembamannya adalah :

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad (2.80)$$

Disamping mengalami gerak rotasi setiap benda yang bergerak pasti mempunyai momentum. Berikutnya akan dibahas tentang hukum kekekalan momentum.

### 2.1.7 Hukum Kekekalan Momentum

Tiap benda yang bergerak mempunyai *momentum*, seperti mobil yang sedang berjalan, anak yang sedang lari, bola ping-pong yang sedang bergerak mempunyai momentum. Momentum juga dinamakan jumlah gerak, yang besarnya berbanding lurus dengan massa dan kecepatan yang dapat pindah ke benda lain. Misalkan benda *A* dan *B* masing-masing mempunyai massa  $m_A$  dan  $m_B$  dan masing-masing bergerak segaris dengan kecepatan  $v_A$  dan  $v_B$ . Kedua benda tersebut lalu bertumbukan hingga kecepatannya masing-masing menjadi  $v'_A$  dan  $v'_B$ . Jika  $F_{AB}$  adalah gaya dari *A* yang dipakai untuk menumbuk *B* dan  $F_{BA}$  adalah gaya dari *B* yang dipakai untuk menumbuk *A*, maka menurut hukum III dari Newton adalah :

Aksi = - reaksi

$$F_{AB} = -F_{BA} \dots\dots\dots (2.81)$$

Jika kedua ruas dari persamaan (2.81) dikalikan dengan waktu tumbukan  $\Delta t$  maka terdapatlah

$$\begin{aligned} F_{AB} \Delta t &= -F_{BA} \Delta t \\ m_A v'_A - m_A v_A &= - (m_B v'_B - m_B v_B) \end{aligned}$$



$$m_A v'_A + m_B v'_B = m_A v_A + m_B v_B \dots \dots \dots (2.82)$$

ternyata, jumlah momentum dari *A* dan *B* sebelum tumbukan sama dengan jumlah momentum dari *A* dan *B* setelah tumbukan. Hal tersebut dinyatakan sebagai hukum kekekalan momentum yang berbunyi :

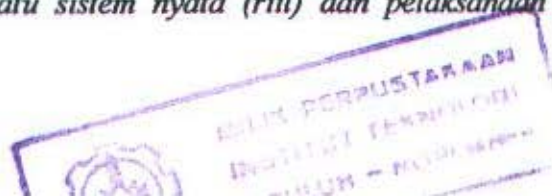
*Jumlah momemntum dari benda-benda yang bertumbukan, sebelum dan sesudah tumbukan adalah konstan.*

Apabila suatu model matematika dari suatu sistem diberikan, maka akan dimungkinkan diperolehnya informasi tentang sistem ini dengan cara analitis. Bila cara analitis tidak dimungkinkan, maka digunakan metode komputasi numerik atau simulasi untuk memecahkan persamaan-persamaan yang ada. Berikut akan dibahas pengertian dasar tentang simulasi.

## 2.2 Pengertian Dasar Simulasi

Pengertian umum tentang simulasi ialah suatu metodologi untuk melaksanakan percobaan dengan menggunakan model dari suatu sistem nyata. Sedangkan ide dasarnya ialah menggunakan beberapa perangkat lunak untuk meniru sistem nyata guna mempelajari dan memahami sifat-sifat, tingkah laku (perangai) dan karakter operasinya. Oleh karena itu, simulasi terutama sekali berkenaan dengan percobaan untuk menaksir tingkah laku dari sistem nyata untuk maksud perancangan sistem atau perubahan tingkah laku sistem.

Kadang-kadang istilah simulasi digunakan untuk menjelaskan prosedur pembuatan model dan perolehan solusinya secara numeris. Menurut Shannon, *simulasi adalah proses perancangan model dari suatu sistem nyata (riil) dan pelaksanaan*



*eksperimen-eksperimen dengan model ini diwujudkan untuk memahami tingkah laku sistem untuk menyusun strategi sehubungan dengan operasi sistem tersebut.*

Sementara itu, menurut Nancy Roberts (1982) langkah-langkah dalam simulasi terdiri atas :

1. Menentukan persoalan atau model yang akan disimulasikan.

Langkah awal dalam simulasi yang paling penting adalah menentukan persoalan atau model yang akan disimulasikan. Persoalan atau model disini berupa model matematis dari suatu permasalahan yang nantinya akan dicarikan solusinya dengan menggunakan bantuan beberapa perangkat lunak.

2. Perancangan simulasi.

Setelah persoalan ditentukan, maka langkah selanjutnya mulai melakukan perancangan terhadap simulasi yang akan dibuat. Perancangan disini meliputi garis besar atau gambaran secara umum dari simulasi yang akan dibuat dan diberikan secara jelas melalui diagram flow-chart (sistem masukan-keluaran).

3. Jalankan simulasi dan analisis data

Langkah terakhir ialah menjalankan simulasi atau mencobanya dengan sesuai rancangan, kemudian menganalisis hasil-hasilnya.



## **BAB III**

### **PEMODELAN DAN PERANCANGAN SIMULASI**

*Doni H. Kurnia*

*Universitas Islam Sumatera Utara*

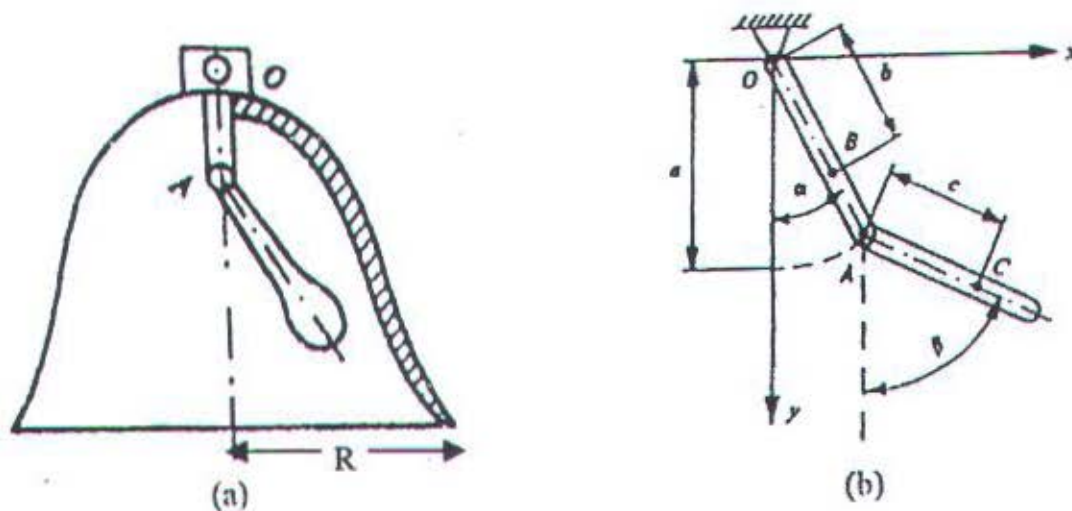


### BAB III

## PEMODELAN DAN PERANCANGAN SIMULASI

### 3.1 PEMODELAN PADA LONCENG

Seperti diketahui lonceng merupakan salah satu aplikasi pendulum ganda yang secara fisis dapat digambarkan seperti dibawah ini.



Gambar 3.1. Lonceng secara fisis

dimana :  $a$  = jarak antara sumbu tegangan O dan engsel A

$b$  = panjang pendulum I dari titik O ke titik B (pusat grafitasi)

$c$  = panjang pendulum II dari titik A ketitik C ( pusat grafitasi)

$R$  = jari-jari tempurung

Dari gambar 3.1 (b) terlihat jelas bahwa lonceng terdiri dari dua buah pendulum ganda yang saling terkait dan bergerak pada bidang datar, dengan  $\alpha$  dan  $\beta$  sebagai peubah bebas.

Seperti telah dijelaskan pada bab I bahwa permasalahan pada lonceng ini adalah menentukan kapan lonceng berbunyi dan tidak berbunyi serta mengapa terjadi. Oleh karena itu perlu dilakukan kajian akan hal ini. Sebagai langkah awal pengkajian perlu dilakukan pemodelan terhadap permasalahan yang ada kedalam persamaan-persamaan atau model-model matematika, yang kemudian disimulasikan dengan program Microsoft Visual Basic sehingga nantinya dapat dilakukan analisis kapan lonceng dikatakan berbunyi dan tidak berbunyi dengan memasukkan beberapa nilai kedalam variabel-variabel yang ada.

Berikut akan dicari model matematika lonceng sesuai dengan keadaan fisis :

Didefinisikan energi kinetik keseluruhan sistem sebagai berikut :

$$T = T_b + T_c, \quad (3.1)$$

dimana :  $T_b$  = energi kinetik dari pendulum I dan  $T_c$  = energi kinetik dari pendulum II.

Menurut persamaan (2.8), maka  $T_b$  dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$T_b = \frac{1}{2} m_b v_b^2, \quad (3.2)$$

$m_b$  merupakan massa pendulum I dan  $v_b$  adalah kecepatan dari pendulum I. Seperti telah dijelaskan pada persamaan (2.76) bahwa  $v = r \cdot \omega_1 = b \cdot \omega_1$ , dimana  $b$  adalah panjang pendulum I dari titik O ke titik B (pusat grafitasi) dan  $\omega_1$  adalah kecepatan anguler massa ( $m_b$ ). Energi kinetik dari titik tersebut adalah :

$$T_b = \frac{1}{2} m_b b^2 \omega_1^2. \quad (3.3)$$

Faktor  $m_b b^2$  dinamakan momen inersia/kelembaman yang diberi notasi  $I_o$ , hingga persamaan (3.3) menjadi :

$$T_b = \frac{1}{2} I_o \omega_1^2. \quad (3.4)$$

Selanjutnya  $\omega_1$  adalah kecepatan anguler massa ( $m_b$ ) yang menurut persamaan (2.75)

bahwa  $\omega_1 = \frac{d\alpha}{dt}$  didefinisikan sebagai turunan sudut  $\alpha$  terhadap waktu  $t$  yang

menyatakan perpindahan/gerak pendulum I terhadap waktu, maka persamaan (3.4) menjadi :

$$T_b = \frac{1}{2} I_o \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)^2, \quad (3.5)$$

sehingga

$$T_b = \frac{1}{2} I_o \dot{\alpha}^2, \quad (3.6)$$

sedangkan :  $T_c$  = energi kinetik dari pendulum II yang dirumuskan sebagai berikut :

Seperti yang telah dijelaskan pada persamaan (2.80) bahwa untuk benda yang tidak

kecil dan terdiri dari sejumlah titik-titik materi, maka momen inersianya :  $I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$ ,

sehingga energi kinetik dari pendulum II :

$$T_c = \frac{1}{2} m_c v_c^2 + I_c \dot{\beta}^2, \quad (3.7)$$

$m_c$  merupakan massa pendulum II dan  $v_c$  adalah kecepatan dari pendulum II, yang

menurut persamaan (2.76) menyatakan bahwa  $v = r \cdot \omega_2 = c \cdot \omega_2$ , dimana  $c$  adalah panjang

pendulum II dari titik A ketitik C ( pusat grafitasi) dan  $\omega_2$  adalah kecepatan anguler

massa ( $m_c$ ) yang menurut persamaan (2.75) bahwa  $\omega_2 = \frac{d\beta}{dt}$  didefinisikan sebagai

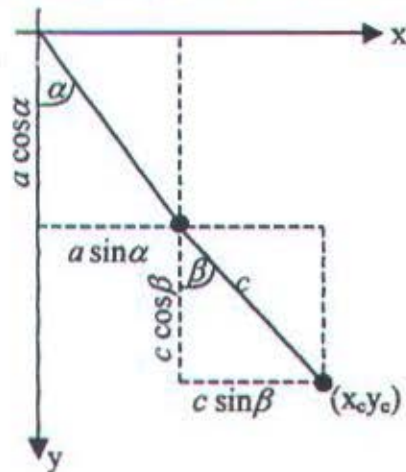


turunan sudut  $\beta$  terhadap waktu  $t$  yang menyatakan perpindahan/gerak pendulum II terhadap waktu. Dengan menggunakan kecepatan umum  $\dot{q}_c$  untuk  $v_c$ , maka energi kinetik dari pendulum II dapat ditulis sebagai berikut :

$$T_c = \frac{1}{2} m_c \dot{q}_c^2 + I_c \dot{\beta}^2 \quad (3.8)$$

$$T_c = \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + I_c \dot{\beta}^2, \quad (3.9)$$

dimana persamaan untuk  $x_c$  dan  $y_c$  dapat diperoleh melalui gambar 3.2 sebagai berikut :



Gambar 3.2 Panjang/tinggi pendulum II yang sejajar sumbu x dan y

Dari gambar (3.2) diatas diperoleh koordinat siku  $x_c$ ,  $y_c$  yang dinyatakan dalam koordinat umum  $q_1$  dan  $q_2$  yang menyatakan sudut  $\alpha$  dan  $\beta$  sebagai berikut :

$$x_c = a \sin \alpha + c \sin \beta \quad ; \quad y_c = a \cos \alpha + c \cos \beta, \quad (3.10)$$

maka turunan persamaan (3.10) terhadap waktu diperoleh :

$$\dot{x}_c = a \dot{\alpha} \cos \alpha + c \dot{\beta} \cos \beta \quad ; \quad \dot{y}_c = -a \dot{\alpha} \sin \alpha - c \dot{\beta} \sin \beta, \quad (3.11)$$

sehingga :

$$\begin{aligned}\dot{x}_c^2 &= a^2 \dot{\alpha}^2 \cos^2 \alpha + 2ac \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta \cos \alpha + c^2 \dot{\beta}^2 \cos^2 \beta, \\ \dot{y}_c^2 &= a^2 \dot{\alpha}^2 \sin^2 \alpha + 2ac \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \sin \alpha + c^2 \dot{\beta}^2 \sin^2 \beta.\end{aligned}\quad (3.12)$$

Persamaan (3.12) disubstitusikan ke persamaan (3.9) menjadi :

$$T_c = \frac{1}{2}(m_c a^2) \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}(I_c + m_c c^2) \dot{\beta}^2 + m_c a c \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos(\beta - \alpha). \quad (3.13)$$

Dari persamaan (3.6) dan persamaan (3.13) akan didapat penyelesaian dari persamaan (3.1) sebagai berikut :

$$\begin{aligned}T &= T_b + T_c \\ T &= \frac{1}{2}(I_o + m_c a^2) \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}(I_c + m_c c^2) \dot{\beta}^2 + m_c a c \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos(\beta - \alpha).\end{aligned}\quad (3.14)$$

Didefinisikan energi potensial keseluruhan sistem sebagai berikut :

$$V = V_b + V_c, \quad (3.15)$$

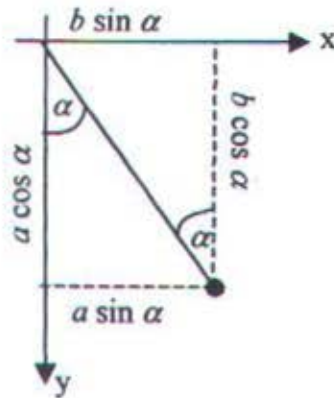
dimana :  $V_b$  = energi potensial dari pendulum I,

$V_c$  = energi potensial dari pendulum II.

Menurut persamaan (2.17), maka  $V_b$  dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$V_b = -m_b g y_b, \quad (3.16)$$

$m_b$  merupakan massa pendulum I dan bertanda negatif karena adanya pengaruh gaya gravitasi sedangkan  $g$  adalah percepatan gravitasi dan  $y_b = b \cos \alpha$  adalah panjang/tinggi pendulum I dari titik O ke pusat gravitasi B yang sejajar sumbu y dan dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 3.3

Panjang/tinggi pendulum I dari titik O ke pusat grafitasi B yang sejajar sumbu y

maka persamaan (3.16) menjadi :

$$V_b = -m_b g b \cos \alpha, \quad (3.17)$$

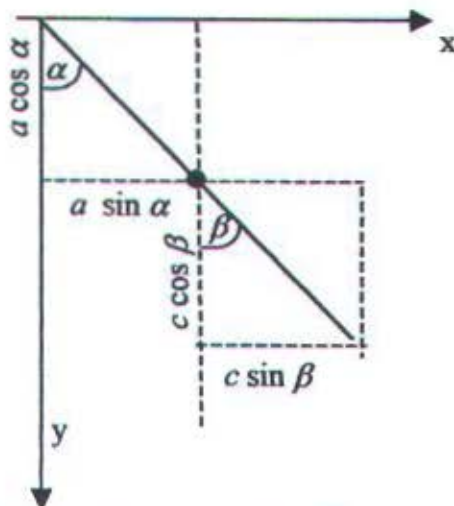
sedangkan :  $V_c$  = energi potensial dari pendulum II yang dirumuskan sebagai berikut :

$$V_c = -m_c g y_c, \quad (3.18)$$

$m_c$  merupakan massa pendulum II, sedangkan  $g$  adalah percepatan grafitasi dan

$y_c = a \cos \alpha + c \cos \beta$  adalah panjang/tinggi pendulum II yang sejajar sumbu y dan

dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 3.4 panjang/tinggi pendulum II yang sejajar sumbu y



maka persamaan (3.18) menjadi :

$$V_c = -m_c g(a \cos \alpha + c \cos \beta). \quad (3.19)$$

Dari persamaan (3.17) dan (3.19) akan diperoleh penyelesaian dari persamaan (3.15) sebagai berikut :

$$V = V_b + V_c$$

$$V = -m_b g b \cos \alpha - m_c g(a \cos \alpha + c \cos \beta). \quad (3.20)$$

Setelah persamaan energi kinetik dan energi potensial sistem diketahui maka dapat di cari persamaan gerak lonceng dengan menggunakan persamaan Lagrange. Metode Lagrange sendiri adalah suatu cara mendapatkan persamaan gerak dengan meminimumkan total energi yang dirumuskan sebagai berikut :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial T}{\partial \beta} + \frac{\partial V}{\partial \beta} = 0 \quad (3.21)$$

maka dari persamaan (3.14) dan (3.20) akan diperoleh persamaan gerak lonceng dalam  $\alpha$  dan  $\beta$  sebagai berikut :

Persamaan (3.14) diturunkan parsial terhadap  $\alpha$  dan  $\beta$  maka menjadi :

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = m_c a c \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin(\beta - \alpha), \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \beta} = -m_c a c \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin(\beta - \alpha). \quad (3.23)$$

Kemudian persamaan (3.14) juga diturunkan parsial terhadap  $\dot{\alpha}$  dan  $\dot{\beta}$  maka menjadi :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = (I_o + m_c a^2) \dot{\alpha} + m_c a c \dot{\beta} \cos(\beta - \alpha), \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} = (I_c + m_c c^2) \dot{\beta} + m_c a c \dot{\alpha} \cos(\beta - \alpha). \quad (3.25)$$

Jika persamaan (3.24) dan (3.25) diturunkan terhadap waktu  $t$  maka diperoleh :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = (I_o + m_c a^2) \ddot{\alpha} + m_c a c \ddot{\beta} \cos(\beta - \alpha) - m_c a c \dot{\beta} (\dot{\beta} - \dot{\alpha}) \sin(\beta - \alpha), \quad (3.26)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} = (I_c + m_c c^2) \ddot{\beta} + m_c a c \ddot{\alpha} \cos(\beta - \alpha) - m_c a c \dot{\alpha} (\dot{\beta} - \dot{\alpha}) \sin(\beta - \alpha). \quad (3.27)$$

Kemudian dari persamaan (3.20) akan diperoleh turunan parsial terhadap  $\alpha$  dan  $\beta$  sebagai berikut :

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = (m_b b + m_c a) g \sin \alpha, \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \beta} = m_c g c \sin \beta \quad (3.29)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.22), (3.24), (3.26), (3.28) kepersamaan (3.21)

akan diperoleh persamaan gerak untuk  $\alpha$  sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \alpha} &= (I_o + m_c a^2) \ddot{\alpha} + m_c a c \ddot{\beta} \cos(\beta - \alpha) - m_c a c \dot{\beta}^2 \sin(\beta - \alpha) + (m_b b \\ &+ m_c a) g \sin \alpha = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

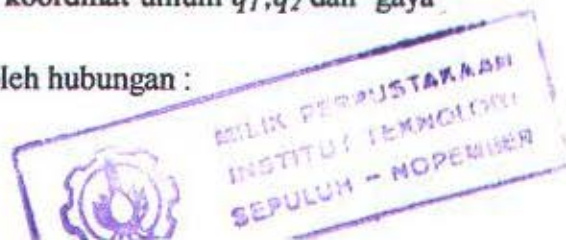
Juga dengan mensubstitusikan persamaan (3.23), (3.25), (3.27), (3.29) kepersamaan

(3.21) akan diperoleh persamaan gerak untuk  $\beta$  sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial T}{\partial \beta} + \frac{\partial V}{\partial \beta} &= (I_c + m_c c^2) \ddot{\beta} + m_c a c \ddot{\alpha} \cos(\beta - \alpha) + m_c a c \dot{\alpha}^2 \sin(\beta - \alpha) + m_c g c \sin \beta \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Bila  $Q_i$  adalah gaya umum yang berhubungan dengan koordinat umum  $q_1, q_2$  dan gaya

yang bekerja merupakan gaya konservatif maka diperoleh hubungan :



$$Q_1 = -\frac{\partial V}{\partial q_1}, \quad Q_2 = -\frac{\partial V}{\partial q_2} \quad \text{menjadi :}$$

$$Q_\alpha = (m_b b + m_c a) g \sin \alpha \quad \text{dan} \quad Q_\beta = m_c g c \sin \beta \quad (3.32)$$

Dengan menggunakan persamaan (2.69), maka diperoleh hubungan antara persamaan (3.30) dan (3.32) sebagai berikut :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \alpha} = Q_\alpha$$

$$(I_o + m_c a^2) \ddot{\alpha} + m_c a c \ddot{\beta} \cos(\beta - \alpha) - m_c a c \dot{\beta}^2 \sin(\beta - \alpha) + (m_b b + m_c a) g \sin \alpha = (m_b b + m_c a) g \sin \alpha$$

sehingga persamaan gerak untuk  $\alpha$  menjadi :

$$(I_o + m_c a^2) \ddot{\alpha} + m_c a c \ddot{\beta} \cos(\beta - \alpha) - m_c a c \dot{\beta}^2 \sin(\beta - \alpha) = 0 \quad (3.33)$$

Karena persamaan (3.33) non-linier maka perlu dilakukan linierisasi terhadap fungsi sinus dan cosinus sebagai berikut : Dengan menggunakan Deret Maclaurin untuk fungsi dari dua variabel bebas didapat :

$$f(\alpha, \beta) = \sin(\alpha - \beta)$$

$$f(0,0) = \sin(0-0) = 0$$

$$f_\alpha(\alpha, \beta) = \cos(\alpha - \beta) \quad ; \quad f_\beta(\alpha, \beta) = -\cos(\alpha - \beta)$$

$$f_\alpha(0,0) = \cos(0-0) = 1 \quad f_\beta(0,0) = -\cos(0-0) = -1$$

sehingga :

$$f(\alpha, \beta) = f(0,0) + \alpha f_\alpha(0,0) + \beta f_\beta(0,0) + \frac{1}{2!} [\alpha^2 f_{\alpha\alpha}(0,0) + 2\alpha\beta f_{\alpha\beta}(0,0) + \beta^2 f_{\beta\beta}(0,0)] + \dots$$

$$f(\alpha, \beta) = 0 + \alpha \cdot 1 + \beta(-1) + O(\alpha^2, \beta^2) + \dots$$

$$f(\alpha, \beta) = \alpha - \beta + O(\alpha^2, \beta^2) + \dots$$

$$f(\alpha, \beta) \approx \alpha - \beta. \quad (3.34)$$



Dengan cara yang sama maka diperoleh :

$$f(\alpha, \beta) = \cos(\alpha - \beta)$$

$$f(0,0) = \cos(0-0) = 1$$

$$f_{\alpha}(\alpha, \beta) = -\sin(\alpha - \beta) \quad ; \quad f_{\beta}(\alpha, \beta) = \sin(\alpha - \beta)$$

$$f_{\alpha}(0,0) = -\sin(0-0) = 0 \quad f_{\beta}(0,0) = \sin(0-0) = 0$$

sehingga :

$$f(\alpha, \beta) = f(0,0) + \alpha f_{\alpha}(0,0) + \beta f_{\beta}(0,0) + \frac{1}{2!} [\alpha^2 f_{\alpha\alpha}(0,0) + 2\alpha\beta f_{\alpha\beta}(0,0) + \beta^2 f_{\beta\beta}(0,0)] + \dots$$

$$f(\alpha, \beta) = 1 + 0 + 0 + O(\alpha^2, \beta^2) + \dots$$

$$f(\alpha, \beta) = 1 + O(\alpha^2, \beta^2) + \dots$$

$$f(\alpha, \beta) \approx 1, \quad (3.35)$$

sehingga dengan mensubstitusikan persamaan (3.34) dan (3.35) kepersamaan (3.33)

maka diperoleh persamaan gerak untuk  $\alpha$  :

$$\frac{(m_b b^2 + m_c a^2) \ddot{\alpha} + m_c a c \ddot{\beta}}{m_c a c \dot{\beta}^2} = \alpha. \quad (3.36)$$

Juga dengan menggunakan persamaan (2.69), maka diperoleh hubungan antara persamaan (3.31) dan (3.32) sebagai berikut :

$$\frac{d}{dT} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial T}{\partial \beta} + \frac{\partial V}{\partial \beta} = Q_{\beta}$$

$$(I_c + m_c c^2) \ddot{\beta} + m_c a c \ddot{\alpha} \cos(\beta - \alpha) + m_c a c \dot{\alpha}^2 \sin(\beta - \alpha) + m_c g c \sin \beta = m_c g c \sin \beta$$

sehingga persamaan gerak untuk  $\beta$  menjadi :

$$(I_c + m_c c^2) \ddot{\beta} + m_c a c \ddot{\alpha} \cos(\beta - \alpha) + m_c a c \dot{\alpha}^2 \sin(\beta - \alpha) = 0. \quad (3.37)$$

Karena persamaan (3.37) non-linier maka perlu dilakukan linierisasi terhadap fungsi sinus dan cosinus. Hasil linierisasinya sama dengan persamaan (3.34) dan (3.35).

sehingga dengan mensubstitusikan persamaan (3.34) dan (3.35) kepersamaan (3.37)

maka diperoleh persamaan gerak untuk  $\beta$  :

$$\frac{2(m_c c^2)\ddot{\beta} + m_c a c \ddot{\alpha}}{m_c a c \dot{\alpha}^2} = \beta \quad (3.38)$$

dimana :

$m_b$  = massa pendulum I (kg)

$m_c$  = massa pendulum II (kg)

$a$  = jarak antara sumbu tegangan O dan engsel A (m)

$b$  = panjang pendulum I dari titik O ke titik B (pusat grafitasi) (m)

$c$  = panjang pendulum II dari titik A ketitik C (pusat grafitasi) (m)

$\ddot{\alpha}$  = percepatan angular pendulum I (rad/det<sup>2</sup>)

$\ddot{\beta}$  = percepatan angular pendulum II (rad/det<sup>2</sup>)

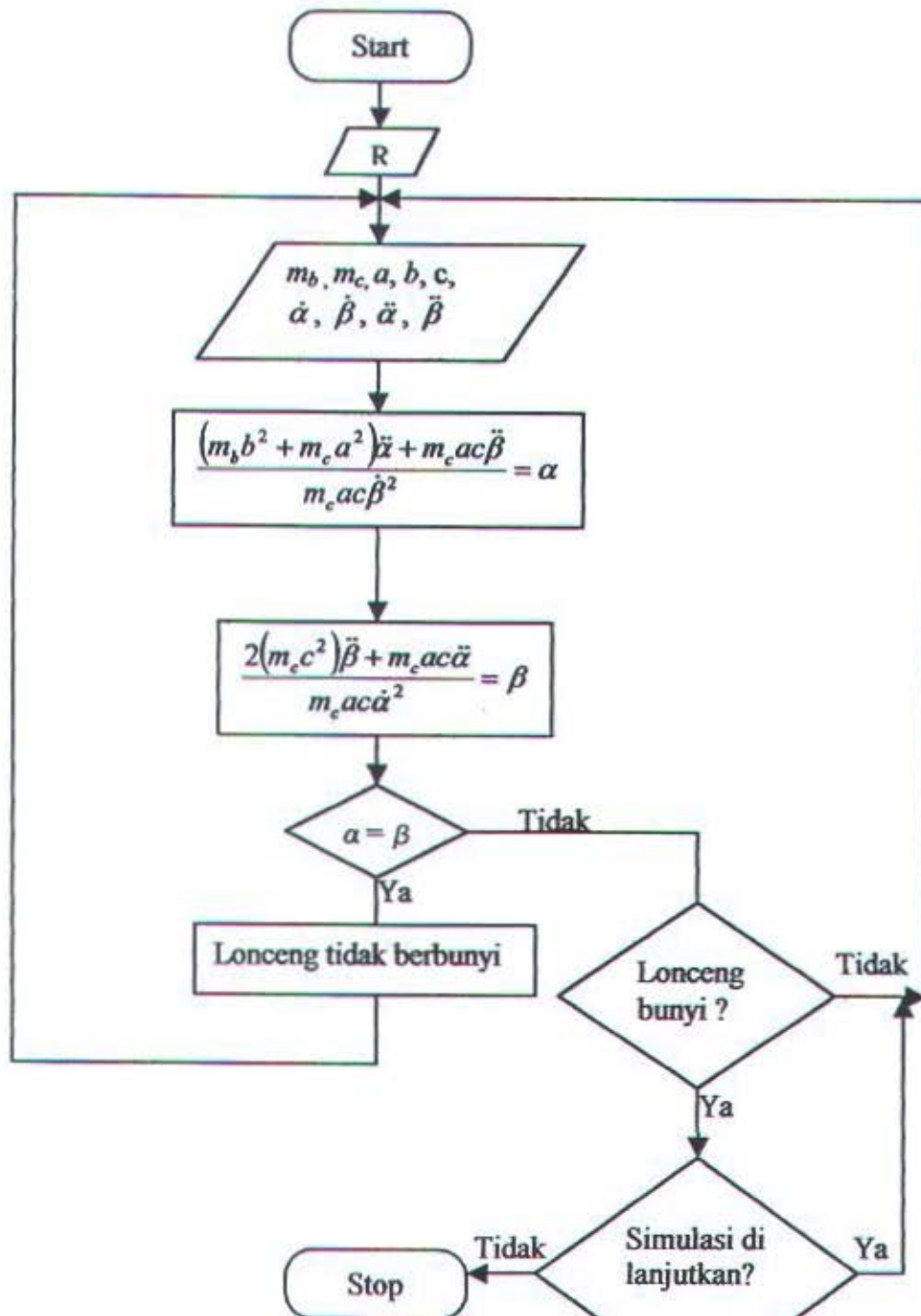
$\dot{\alpha}$  = kecepatan angular pendulum I (rad/det)

$\dot{\beta}$  = kecepatan angular pendulum II (rad/det)

Setelah model persamaan gerak pada lonceng didapat maka langkah selanjutnya adalah melakukan perancangan terhadap simulasi yang akan dibuat.

### 3.2 PERANCANGAN SIMULASI

Rancangan simulasi yang dibuat merupakan gambaran dari simulasi yang akan dilakukan. Secara garis besar dapat dilihat pada gambar 3.5 dibawah ini tentang diagram flow-chart (sistem masukan-keluaran) dari lonceng :



Gambar 3.5 Diagram Flow Chart (Sistem masukan-keluaran) dari lonceng



Dari diagram diatas terlihat bahwa proses simulasi dimulai dengan memasukkan nilai yang berupa angka-angka numerik kedalam parameter-parameter input yang terdiri dari  $m_b$ ,  $m_c$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$ ,  $\ddot{\alpha}$ ,  $\ddot{\beta}$ , dan  $R$  yang kemudian akan dilakukan penghitungan untuk mendapatkan nilai  $\alpha$  dan  $\beta$ .

Apabila hasil outputnya diperoleh nilai  $\alpha = \beta$  dengan nilai  $R$  (jari-jari tempurung) yang telah ditentukan, maka lonceng dapat dikatakan tidak berbunyi yang disebabkan pendulum ganda bergerak sejajar bersamaan dengan tempurung dan hal ini mengakibatkan lonceng tidak berbunyi dikarenakan ujung pendulum bawah atau pemukul tidak memungkinkan menyentuh sisi dari tempurung lonceng. Seperti telah dijelaskan pada batasan masalah yang terdapat pada bab I bahwa pendeteksian bunyi pada lonceng dibatasi untuk lengan yang menyentuh hanya pada daun tempurung lonceng atau setengah kebawah tinggi lonceng. Karena lonceng tidak berbunyi maka simulasi akan dilanjutkan dengan memasukkan kembali nilai-nilai kedalam parameter-parameter inputan.

Dan bila diperoleh hasil outputnya ternyata nilai  $\alpha \neq \beta$  dengan  $R$  yang terlebih dahulu ditetapkan dan diinputkan maka akan terdapat dua kemungkinan yaitu lonceng berbunyi atau tidak berbunyi. Apabila didapati lonceng tidak berbunyi yang disebabkan nilai  $\alpha$  dan  $\beta$  diluar range nilai  $\alpha$  dan  $\beta$  yang memungkinkan lonceng berbunyi, maka simulasi akan dilanjutkan dan bila lonceng berbunyi maka simulasi dapat dilanjutkan atau tidak.



## **BAB IV**

### **IMPLEMENTASI DAN ANALISIS**

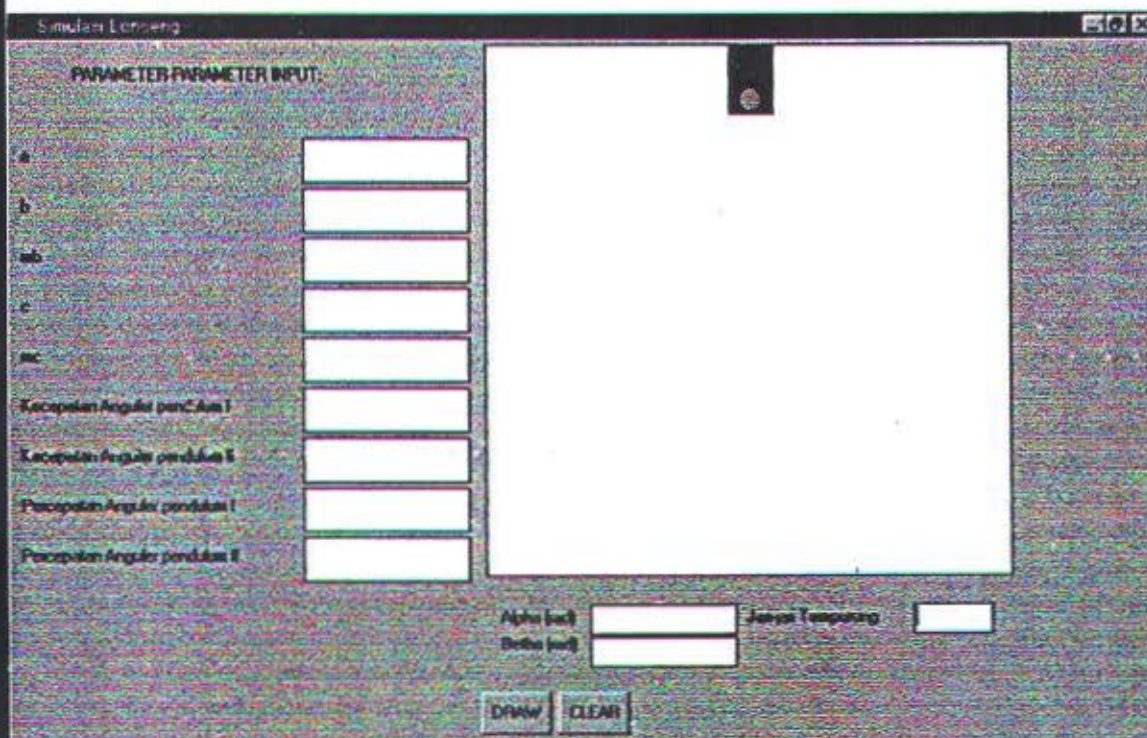
Form 10 Rangkai



## BAB IV

### IMPLEMENTASI DAN ANALISIS

Setelah rancangan simulasi dibuat, maka langkah selanjutnya adalah melakukan implementasi dan analisis. Adapun simulasi dilakukan dengan menggunakan bantuan program Microsoft Visual Basic 6.0. Dan gambar 4.1 dibawah ini merupakan tampilan muka simulasi lonceng yang terdiri dari parameter-parameter input dan output.

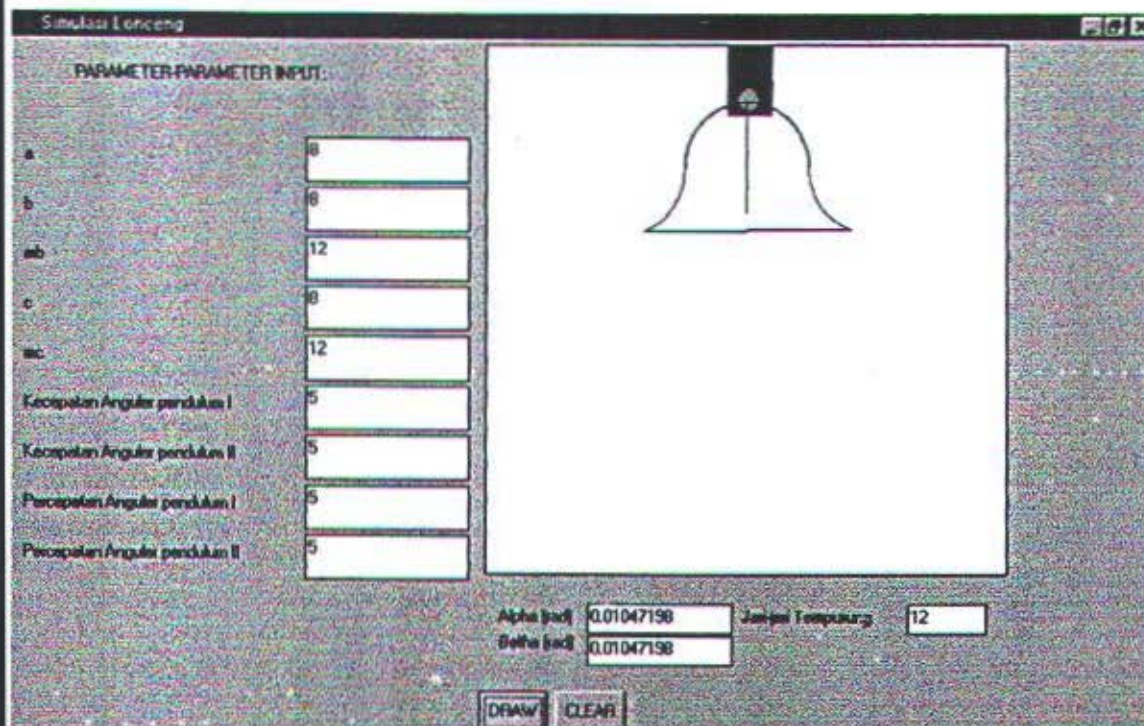


Gambar 4.1 Tampilan muka simulasi lonceng

Implementasi diawali dengan memasukkan nilai  $R = 12$  yang nantinya akan dicari nilai  $\alpha$  dan  $\beta$  sebarang berapa saja yang memungkinkan lonceng berbunyi dengan nilai  $R$  yang telah ditetapkan. Berikut ini diberikan nilai parameter-parameter inputan awalnya yaitu :



$a = 8, b = 8, c = 8, m_b = 12, m_c = 12, \dot{\alpha} = 5, \dot{\beta} = 5, \ddot{\alpha} = 5, \text{ dan } \ddot{\beta} = 5$ , maka diperoleh hasil output seperti pada gambar 4.2 dibawah ini.

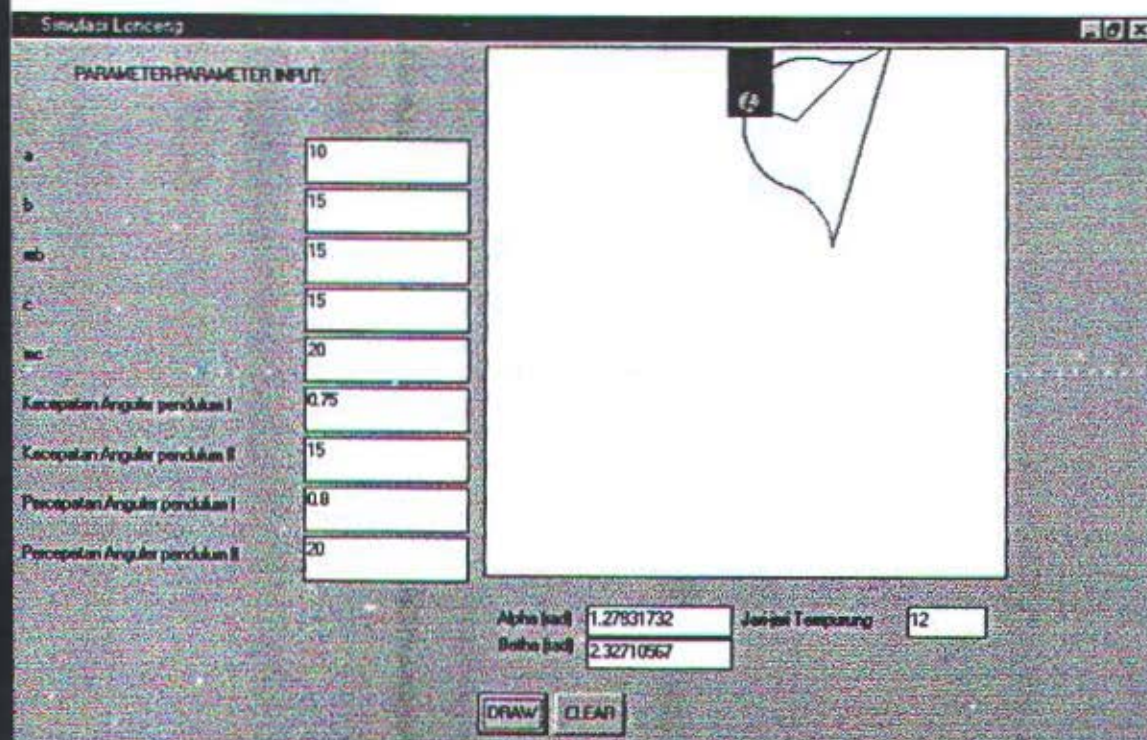


Gambar 4.2 Hasil Output Lonceng dengan nilai  $\alpha = \beta$  dan  $R = 12$

Dari gambar 4.2 diatas diperoleh nilai  $\alpha = \beta = 0.01047198$ , dan ternyata lonceng tidak berbunyi yang disebabkan pendulum ganda bergerak sejajar bersamaan dengan tempurung dan hal ini mengakibatkan lonceng tidak berbunyi dikarenakan ujung pendulum bawah atau pemukul tidak memungkinkan menyentuh sisi dari tempurung lonceng.

Oleh karena lonceng tidak berbunyi maka simulasi dilanjutkan dengan mencoba memasukkan nilai yang lain kedalam parameter-parameter inputan sebagai berikut :

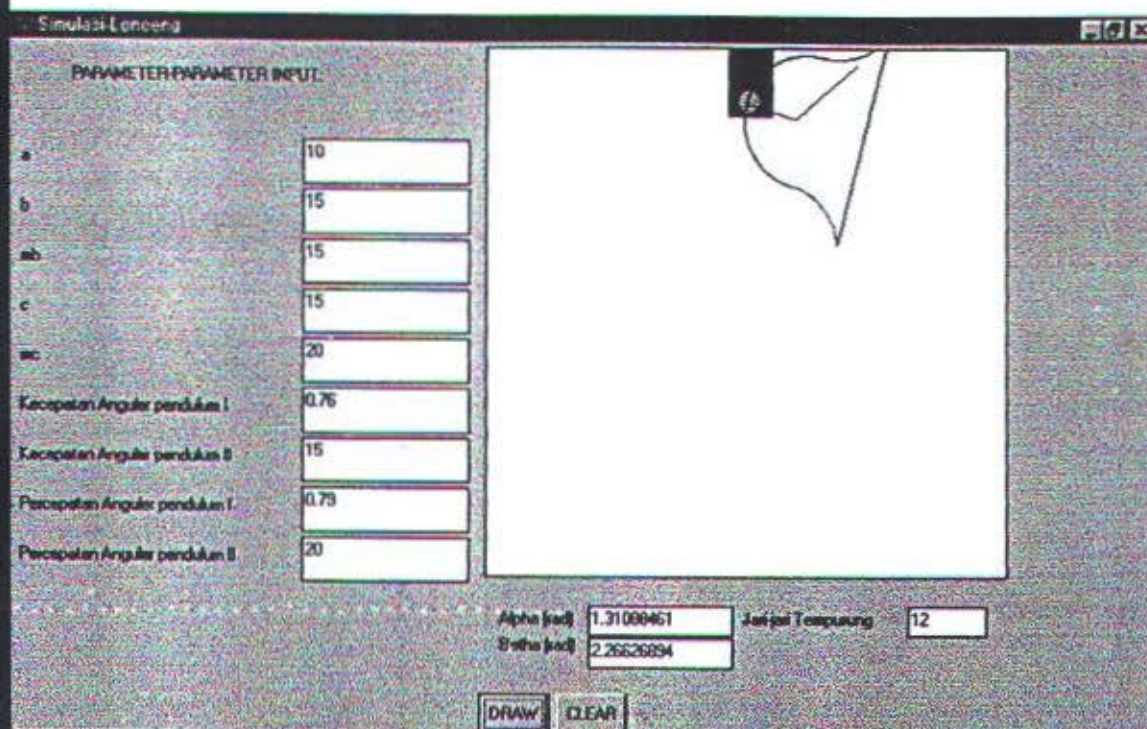
$a = 10, b = 15, c = 15, m_b = 15, m_c = 20, \dot{\alpha} = 0.75, \dot{\beta} = 15, \ddot{\alpha} = 0.8, \text{ dan } \ddot{\beta} = 20$ , maka diperoleh hasil output seperti pada gambar 4.3 dibawah ini.



Gambar 4.3 Hasil Output Lonceng dengan nilai  $\alpha \neq \beta$  dan  $R = 12$

Terlihat pada gambar 4.3 diatas bahwa lonceng tidak berbunyi dengan nilai  $\alpha \neq \beta$  yaitu  $\alpha = 1.27831732$  dan  $\beta = 2.32710567$  serta ujung pendulum bawah atau pemukul tidak menyentuh sisi dari tempurung lonceng sehingga mengakibatkan lonceng tidak berbunyi. Oleh karena itu simulasi akan dilanjutkan dengan terus mencari nilai  $\alpha$  dan  $\beta$  berapa saja yang memungkinkan lonceng berbunyi. Untuk itu perlu memasukkan nilai lagi yang lain kedalam parameter-parameter inputannya sebagai berikut :  $a = 10, b = 15, c = 15, m_b = 15, m_c = 20, \dot{\alpha} = 0.76, \dot{\beta} = 15, \ddot{\alpha} = 0.79, \text{ dan } \ddot{\beta} = 20$ , maka diperoleh hasil output seperti pada gambar 4.4 dibawah ini.

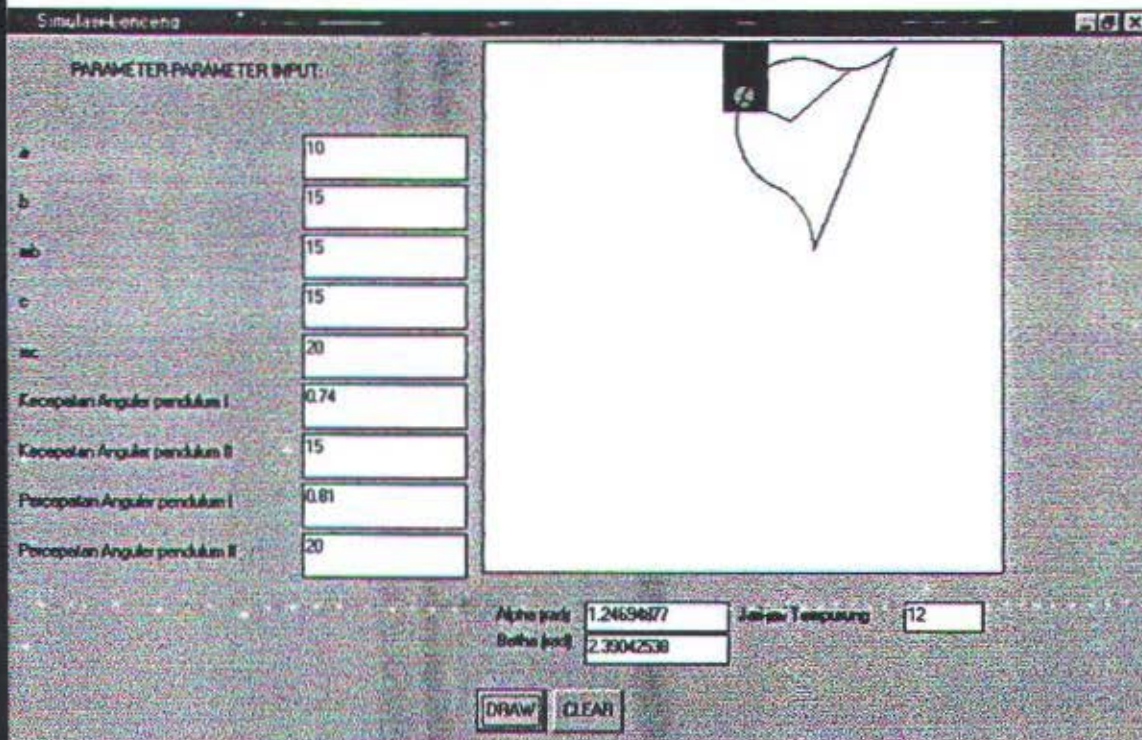




Gambar 4.4 Hasil Output Lonceng dengan nilai  $\alpha \neq \beta$  dan  $R = 12$

Ternyata dari gambar 4.4 diatas lonceng juga masih belum berbunyi dengan nilai  $\alpha \neq \beta$  yaitu  $\alpha = 1.31088461$  dan  $\beta = 2.26626894$  serta ujung pendulum bawah atau pemukul masih belum menyentuh sisi dari tempurung lonceng sehingga mengakibatkan lonceng tidak berbunyi. Untuk itu simulasi akan dilanjutkan dengan memasukkan kembali nilai yang lain kedalam parameter-parameter inputan sebagai berikut :  $a = 10$ ,  $b = 15$ ,  $c = 15$ ,  $m_b = 15$ ,  $m_c = 20$ ,  $\dot{\alpha} = 0.74$ ,  $\dot{\beta} = 15$ ,  $\ddot{\alpha} = 0.81$ , dan  $\ddot{\beta} = 20$ , maka diperoleh hasil output seperti pada gambar 4.5 dibawah ini.





Gambar 4.5 Hasil Output Lonceng dengan nilai  $\alpha \neq \beta$  dan  $R = 12$

Dari gambar 4.5 diatas diperoleh lonceng telah berbunyi dengan nilai  $\alpha \neq \beta$  yaitu  $\alpha = 1.24694877$  dan  $\beta = 2.39042538$  serta ujung pendulum bawah atau pemukul telah menyentuh sisi dari tempurung lonceng sehingga mengakibatkan lonceng berbunyi, maka dari itu dapat ditarik kesimpulan jika nilai  $\alpha < 1.27831732$  dan  $\beta > 2.32710567$  maka lonceng berbunyi, sebaliknya jika nilai  $\alpha \geq 1.27831732$  dan  $\beta \leq 2.32710567$  maka lonceng tidak berbunyi.



**BAB V**  
**KESIMPULAN**

## BAB V

### KESIMPULAN

Dari Implementasi dan analisis yang telah dilakukan, maka dapat disimpulkan bahwa :

1. Lonceng tidak berbunyi :

- Jika nilai  $\alpha = \beta$  untuk semua nilai R (jari-jari tempurung), yang disebabkan pendulum ganda bergerak sejajar bersamaan dengan tempurung mengakibatkan ujung pendulum bawah atau pemukul tidak memungkinkan menyentuh sisi dari tempurung lonceng.
- Jika nilai  $\alpha \neq \beta$ , dimana nilai  $\alpha$  dan  $\beta$  diluar interval nilai  $\alpha$  dan  $\beta$  sebarang yang memungkinkan lonceng berbunyi.

2. Lonceng berbunyi :

- Untuk nilai  $\alpha \neq \beta$ , dengan mencari nilai interval  $\alpha$  dan  $\beta$  sebarang berapa saja yang memungkinkan lonceng berbunyi dengan nilai R yang telah ditentukan.



## **DAFTAR PUSTAKA**

## DAFTAR PUSTAKA

- Epieprucha. K. A, (1986), *Mathematical Modelling of Mechanical Complex Systems Volume 1 Diskrit Model*, Ellishorwood Limited.
- Indriani. I, (2004), *Pemodelan Sistem Mekanika Getaran menggunakan Cut Set*, skripsi, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Sears. F. W, (1964), *Mekanika Panas dan Bunyi*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- Thomson. W. T, (1972), *Theory of Vibration with Application*, Prentice Hall, Inc.
- Seto. W. W, (1980), *Theory and Problems of Mechanical Vibrations*, Schaum Outline Series, Mcbraw Hill, Book Company.
- Sumadji, (1976), *Energi Gelombang Dan Medan I*, PN Balai Pustaka.
- Setiawan. S, (1991), *Simulasi Teknik Pemrograman dan Metode Analisis*, Andi Offset Yogyakarta.
- Roberts. N, (1982), *Introduction to Computer Simulation a system dynamics modeling approach*, Addison-Wesley Publishing.